АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 89, № 5, с. 441–448

УДК 523.9-464

СПИРАЛЬНОСТЬ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРИ ЯЧЕЕЧНОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ

© 2012 г. А. В. Гетлинг*

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21.10.2011 г.; принята в печать 22.11.2011 г.

Спиральность ячеечного конвективного течения в подогреваемом снизу горизонтальном слое сжимаемого вещества (газа), вращающемся вокруг вертикальной оси, исследуется путем конечно-разностного численного моделирования. Среда считается политропно стратифицированной. Вносятся такие начальные тепловые возмущения, которые создают систему шестиугольных конвективных ячеек бенаровского типа. Ячейки в дальнейшем деформируются вследствие действия силы Кориолиса, но их эволюция включает в себя этап, на котором течение близко к стационарному (в дальнейшем ячейки разрушаются). При заданных числах Рэлея и Прандтля усредненная по слою спиральность поля скоростей, соответствующая этому этапу, возрастает с уменьшением индекса политропы (т.е. с увеличением кривизны статического профиля энтропии) и имеет максимум при некотором значении скорости вращения слоя. Численное моделирование таких квазиупорядоченных конвективных течений должно внести бо́льшую определенность в оценки спиральности, которая играет важную роль в механизме МГД-динамо.

1. ВВЕДЕНИЕ

После обнаружения эффекта генерации крупномасштабных магнитных полей турбулентными течениями проводящей жидкости [1, 2] центр тяжести исследований возникновения и эволюции глобального магнитного поля Солнца быстро сместился в область электродинамики средних полей и основанной на ней теории турбулентного динамо. В результате изучение механизмов генерации, основанных на действии турбулентности, уже давно стало основным, доминирующим подходом в этой области физики Солнца [3].

Влияние турбулентного течения на магнитное поле чаще всего рассматривают в кинематическом приближении (не учитывая обратного воздействия). Допустим, что турбулентность однородна и слабоанизотропна. Тогда для вектора средней э.д.с.

$$\mathcal{E} \equiv \langle [\mathbf{u} \times \mathbf{b}] \rangle, \tag{1}$$

обусловленной взаимодействием пульсаций скорости $\mathbf{u}$ и пульсаций магнитного поля[1] $\mathbf{b}$, квазилинейное приближение (сглаживание первого порядка, часто используемое в электродинамике средних полей [4, 5]), в низших порядках разложения по малой величине, обратной пространственному масштабу изменений среднего поля $\mathbf{B}$, дает

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{B} - \beta \mathrm{rot} \mathbf{B}. \tag{2}$$

(Традиционное обозначение α, принятое для коэффициента пропорциональности в первом члене этого выражения, породило ставшее общепринятым название явления возникновения средней э.д.с. — *α-эффект.*)

С учетом (2) уравнение индукции среднего поля для турбулентной среды имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\{[\mathbf{U} \times \mathbf{B}] + \alpha \mathbf{B} - \mathrm{rot}(\nu_\mathrm{m} + \beta)\mathbf{B}\}, \tag{3}$$

где векторы магнитной индукции $\mathbf{B}$ и скорости $\mathbf{U}$ получены усреднением по ансамблю турбулентных пульсаций, ν_m — обычная магнитная вязкость, определяемая омической диссипацией, а β — турбулентная магнитная вязкость (которая может превышать омическую на порядки).

Важная роль в создании α-эффекта принадлежит спиральности поля скоростей $h = \mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}$, в конечном счете — ее среднему значению $\langle h \rangle$ (имеется в виду усреднение по ансамблю реализаций случайного поля и, вообще говоря, по исследуемому объему). Введя спектральную функцию спиральности $F(k, \omega)$, такую что

$$\langle h \rangle = \iint F(k, \omega) \mathrm{d}k \mathrm{d}\omega \tag{4}$$

*E-mail: A.Getling@mail.ru

[1] Как это часто принимают в работах по магнитной гидродинамике, будем считать допустимым употребление термина *(магнитное) поле* в значении *магнитная индукция* — в нашем случае различие между этими понятиями несущественно.

(здесь и далее $\mathbf{k}$ и ω — волновой вектор и частота фурье-гармоники каждой рассматриваемой физической величины), можно показать, что от нее зависит и величина α. Если $F(k, \omega) = 0$ (условие, не необходимое, но достаточное для того, чтобы было $\langle h \rangle = 0$), то $\alpha = 0$. Связь между средней спиральностью поля скоростей и α-эффектом, таким образом, видна довольно отчетливо. Нередко утверждают (или молчаливо предполагают), что α-эффект возможен только при $\langle h \rangle \neq 0$. Как показали Гилберт и др. [6], ненулевая средняя спиральность не необходима для возникновения α-эффекта, но она способствует его возникновению.

Физически условие $\langle h \rangle \neq 0$ означает, что потоки, закрученные вправо и влево (такая закрученность может возникать благодаря действию силы Кориолиса), возникают не в одинаковом количестве или различны по интенсивности. Иначе говоря, свойства турбулентного поля $\mathbf{u}$ неинвариантны относительно преобразования четности — перехода от правой системы координат (x, y, z) к левой $(-x, -y, -z)$, поэтому вероятности того или иного значения вектора скорости для пульсационных полей $\mathbf{u}$ и $-\mathbf{u}$ в данной точке в данный момент неодинаковы (так называемая отражательная неинвариантность поля).

Идею принципиальной значимости отражательной неинвариантности турбулентного поля для возникновения α-эффекта обосновывают следующим образом. Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ с точностью до числового множителя (который по-разному выглядит в разных системах единиц) равен истинному вектору плотности тока $\mathbf{j}$, то $\mathbf{H}$ и магнитная индукция $\mathbf{B}$ являются псевдовекторами. Согласно (1), $\mathcal{E}$ — истинный вектор, а из (2) видно, что коэффициент α должен быть псевдоскаляром, поскольку он стоит при псевдовекторе в выражении для истинного вектора $\mathcal{E}$. Допустим, поле $\mathbf{u}$ обладает отражательной инвариантностью. Тогда α не должно измениться в результате преобразования четности, так как не изменяется ансамбль реализаций поля. С другой стороны, α — псевдоскаляр, и его знак должен измениться. Следовательно, для отражательно-инвариантной турбулентности $\alpha = 0$.

Псевдоскаляром является и спиральность, поскольку она получается скалярным умножением истинного (полярного) вектора $\mathbf{u}$ на аксиальный вектор (псевдовектор) $\operatorname{rot} \mathbf{u}$. Таким образом, ненулевая средняя спиральность гарантирует, что турбулентность не обладает отражательной инвариантностью, и это делает возможным α-эффект.

Величина α-эффекта сильно зависит от свойств турбулентности, и, чтобы оценить его в конкретной ситуации, приходится делать предположения, касающиеся этих свойств. Для условий конвективной зоны Солнца оценки коэффициента α варьируют от нескольких см/с до 10^4 см/с, что конечно же означает очень большую степень неопределенности при переносе результатов расчетов моделей динамо на реальные солнечные условия.

Надо сказать, что представление поля скоростей как ансамбля хаотических пульсаций в случае конвективной зоны Солнца содержит в себе определенную натяжку. Конвективные течения солнечной плазмы обладают заметной упорядоченностью. И видно это не только из факта существования четко обозначенных ячеек супергрануляции и мезогрануляции (грануляция — предмет особого разговора [7, 8]), а также еще не слишком детально изученных гигантских ячеек [9], но и из наличия признаков более сложной упорядоченности в структурной организации течений [8, 10].

Эта работа имеет своей целью показать, что описание солнечного динамо на языке электродинамики средних полей может опираться на оценки средней спиральности не столь произвольные, как в случае рассмотрения хаотических полей. А именно, численное моделирование ячеечных течений, в той или иной мере схожих с реально наблюдаемыми, позволяет непосредственно рассчитывать среднюю спиральность поля скоростей и, что особенно важно, исследовать ее зависимость от параметров стратификации атмосферы (разумеется, усреднение спиральности в этом случае должно производиться по объему, в котором происходит течение, а не по ансамблю реализаций — поле скоростей при такой постановке задачи случайным не является).

Учет спиральной составляющей поля скоростей в расчетах конвективного механизма усиления и структурирования магнитного поля [11] должен стать шагом на пути к выявлению связи между глобальными и локальными солнечными полями.

В представленных здесь численных расчетах выявляется, в частности, то обстоятельство, что средняя спиральность ячеечного течения как функция угловой скорости вращения среды в целом меняется не монотонно, а имеет максимум. Этот факт находит естественное объяснение, если учесть, что вращение среды стремится подавить конвекцию, причем предельный случай больших скоростей вращения соответствует условиям теоремы Тейлора—Праудмана, когда поле скоростей вещества двумерно — постоянно вдоль направления вектора угловой скорости вращения среды.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Как уже было сказано, основной причиной возникновения ненулевой спиральности h является сила Кориолиса, обусловленная вращением жидкости в целом. Однако если среда более или менее однородна (скажем, в пределах справедливости приближения Буссинеска), то значения локальной спиральности конвективного поля, которая имеет разные знаки в разных частях слоя, будут при усреднении давать величину, близкую к нулю. Это легко увидеть на примере поля скоростей, получаемого в линейной теории [12, гл. 3] для конвекции Рэлея—Бенара во вращающемся слое, к которому применимо приближение Буссинеска. На рис. 1, построенном для шестиугольной ячейки, видно, что при направленном вверх векторе $\mathbf{\Omega}$ угловой скорости вращения слоя траектория жидкой частицы закручена в правую спираль в нижней части слоя и в левую в верхней его части. Вследствие однородности слоя картина симметрична относительно горизонтальной плоскости, проходящей на середине высоты слоя, поэтому усреднение спиральности по слою дает $\langle h \rangle = 0$.

Средняя спиральность будет иметь конечную величину, если между верхней и нижней половиной слоя имеется заметная асимметрия. Поэтому естественно ожидать, что, в отличие от буссинескова случая, средняя спиральность не будет нулевой при конвекции сжимаемого газа. Именно ее мы здесь и рассмотрим.

Будем считать, что горизонтальный слой сжимаемого вещества $-0.5 \le z/L \le 0.5$ (где L — толщина слоя, а ось z направлена вверх), вращающийся вокруг оси z, имеет политропную стратификацию: $p = K\rho^{\Gamma}$, $m = 1/(\Gamma - 1)$ (p и ρ — давление и плотность статической атмосферы, Γ и m — соответственно показатель и индекс политропы). Тогда, оперируя термодинамическим величинами, рассчитанными на единицу массы вещества, получим следующие невозмущенные (статические) распределения энтропии s и температуры T:

$$s = \frac{c_p}{\gamma}[1 - (\gamma - 1)m] \ln \frac{z - z_\infty}{z_{\text{ref}} - z_\infty}, \qquad (5)$$

$$T = \frac{c_s^2}{c_p(\gamma - 1)} = \frac{1}{c_p(m+1)} \frac{\gamma}{\gamma - 1} g_z (z - z_\infty) \qquad (6)$$

(см., например, руководство к используемому здесь программному пакету Pencil Code [13] — с ним мы согласуем наши обозначения); здесь $\gamma = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей (показатель адиабаты), $g_z = \text{const} < 0$ — ускорение свободного падения, $c_{\text{s}} = \gamma p/\rho$ — адиабатическая скорость звука, z_∞ — значение координаты z, при котором обращается в ноль гравитационный потенциал, выбранный в виде $\Phi = (z - z_\infty)(-g_z)$, а z_{ref} — значение z, при котором плотность и скорость звука принимают некоторые характерные значения ρ_0 и $c_{\text{s}0}$, выбранные в качестве отсчетных (мы положили,

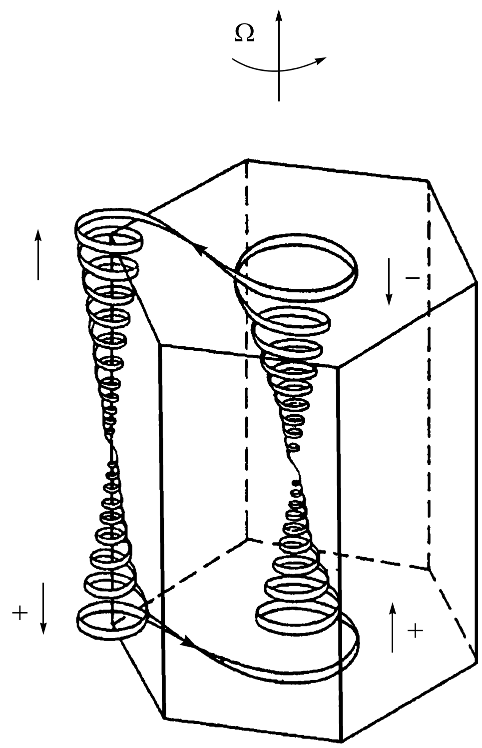

Рис. 1. Характер течения в шестиугольной конвективной ячейке согласно линейной теории [12]. Длинная вертикальная стрелка вверху — вектор $\mathbf{\Omega}$ угловой скорости жидкости в целом. Более короткие стрелки показывают направления вектора завихренности в разных частях траектории жидкой частицы; рядом указаны знаки локальной спиральности (+ или −). Построено на основе рис. 25b из книги [12].

что на этой высоте $s \equiv s_0 = 0$). Величины z_∞ и z_{ref} связаны соотношением

$$z_\infty = z_{\text{ref}} + (m+1)\frac{c_{\text{s}0}^2}{\gamma(-g_z)}. \qquad (7)$$

Градиент температуры при отсутствии конвективных движений равен

$$\beta = \frac{dT}{dz} = \frac{c_{\text{s}}^2}{c_p(\gamma - 1)} = \frac{1}{c_p(m+1)} \frac{\gamma}{\gamma - 1} g_z < 0. \qquad (8)$$

Как известно, в сжимаемой среде конвективная неустойчивость определяется наличием направленного вниз градиента энтропии. Поэтому в определении числа Рэлея должен фигурировать перепад (по слою) не температур, а энтропии [14]:

$$\text{Ra} = \frac{(-g_z)L^3}{\nu\chi} \frac{\Delta s}{c_p} \qquad (9)$$

(ν — кинематическая вязкость среды, χ — ее температуропроводность, Δs — разность статических

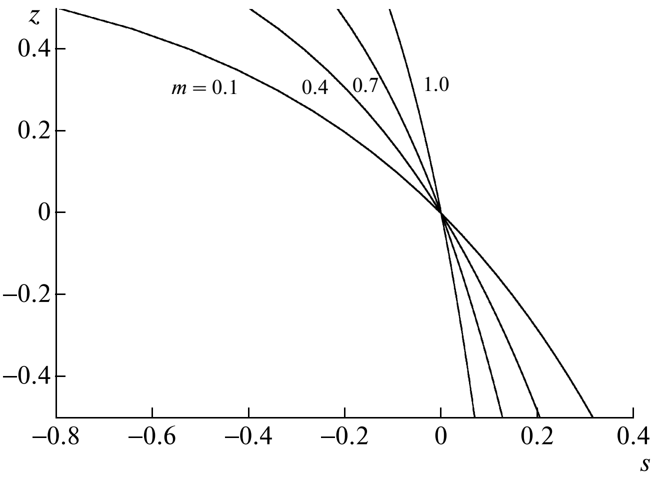

Рис. 2. Статические профили $s(z)$ при различных m.

значений энтропии на нижней и верхней границе). Для политропной стратификации оно оказывается равным

$$\mathrm{Ra} = \frac{(-g_z)L^3}{\nu\chi} \times \tag{10}$$
$$\times \frac{1}{\gamma}[1-(\gamma-1)m]\ln\frac{-0.5-z_\infty}{0.5-z_\infty}.$$

Будем исходить из системы уравнений Навье–Стокса для сжимаемой среды, пренебрегая объемной вязкостью и вязкой диссипацией механической энергии (используемая форма записи уравнений имеется в [13]).

В качестве граничных условий примем: (а) условие прилипания на верхней и нижней поверхностях слоя (т.е. будем считать эти границы жесткими)

$$\mathbf{v}\left(x,y,-\frac{1}{2}L\right) = \mathbf{v}\left(x,y,\frac{1}{2}L\right) = 0, \tag{11}$$

(б) условие изотермичности этих поверхностей

$$T\left(x,y,-\frac{1}{2}L\right) = T_0 = \mathrm{const}, \tag{12}$$
$$T\left(x,y,\frac{1}{2}L\right) = T_1 = \mathrm{const}$$

и (в) условия периодичности каждой физической переменной $f(x,y,z)$ по горизонтальным направлениям

$$f\left(-\frac{1}{2}L_x,y,z\right) = f\left(\frac{1}{2}L_x,y,z\right), \tag{13}$$
$$f\left(x,-\frac{1}{2}L_y,z\right) = f\left(x,\frac{1}{2}L_y,z\right)$$

(где L_x и L_y — пространственные периоды по координатам x и y).

В начальный момент считаем среду неподвижной, а поле энтропии (или температуры) слабовозмущенным. Зададим такую форму начального возмущения, чтобы на начальном этапе развития конвекции возникала система правильных шестиугольных ячеек с восходящими течениями в их центральных частях и нисходящими на их периферии. Волновое число этого возмущения выбираем равным $k = 2.22$, что соответствует критическому волновому числу k_c классической задачи Рэлея–Бенара для случая свободных границ (заметим, что в наших расчетах границы считаются жесткими, и соответственно $k_c = 3.12$).

При расчетах будем пользоваться безразмерным представлением переменных, выбирая L, $-g_z$ и $\sqrt{L/(-g_z)}$ в качестве единиц измерения длины, ускорения и времени соответственно. Единицу массы определяем, полагая среднюю плотность равной $\langle\rho\rangle = 1$. Кроме того, для отсчетной скорости звука полагаем $c_{s0} = 1$. В программном пакете автоматически принимается, что $c_p = 1$. Таким образом, единицы измерения энтропии и температуры оказываются определенными посредством (5) и (6). (Заметим, что в формулах, описывающих стратификацию, скорость звука фигурирует лишь как термодинамическая величина и поэтому не обязательно должна измеряться в тех же единицах, что и скорость течения; в решаемых же уравнениях связанные со скоростью звука энтропия и температура, конечно, должны быть согласованы по выбору единиц с остальными переменными, но их абсолютные значения нас интересовать не будут.)

Представленные здесь расчеты выполнялись в основном для числа Рэлея $\mathrm{Ra} = 20050.7$ и числа Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$; индекс политропы варьировался в пределах $m = 0.1$–1, и для каждого m значения ν и χ подбирались так, чтобы получить задан-

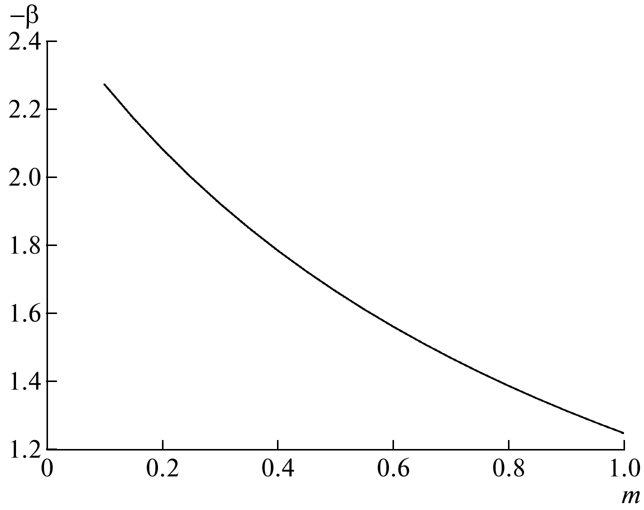

Рис. 3. Зависимость $\beta(m)$ для Ra $= 20050.6$.

ные Ra и Pr. Статические профили энтропии $s(z)$ для различных m представлены на рис. 2. Для заданного Ra зависимость статического градиента температуры β от m имеет вид, показанный на рис. 3.

Для моделирования конвективных течений мы применяем высокоэффективный и удобный в использовании программный пакет Pencil Code, разработанный Бранденбургом и Доблером [13]. Он позволяет рассчитывать течения сжимаемой среды (допуская, вообще говоря, присутствие магнитного поля) с использованием конечных разностей шестого порядка по пространственным координатам и третьего порядка по времени. Пакет легко настраивается на различное число используемых процессорных ядер. Вычисления, относящиеся к рассматриваемой здесь задаче, проводились параллельно на восьми ядрах.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Введенные нами условия периодичности физических полей по горизонтали оказывают на рассчитываемое течение значительное стабилизирующее воздействие [15, гл. 6]. Поэтому в типичном рассчитанном сценарии эволюции из слабых начальных тепловых возмущений развиваются шестиугольные ячейки, которые затем сохраняются в течение более или менее длительного периода (рис. 4); в этом квазистационарном режиме амплитуда скорости — ее максимальное значение $u_{\max}$ — и средняя спиральность меняются медленно (рис. 5). Правда, на раннем этапе своего развития поле скоростей в ячейках довольно быстро перестраивается к “двухвихревой” структуре [16] — в центральной части ячейки, как и по ее краям, развивается нисходящий поток, окруженный кольцевой областью восходящего потока; при этом в меридиональном сечении ячейки течение образует два вихря (что и дало основания назвать такую структуру двухвихревой). В период квазистационарности ячейки имеют именно такую структуру. Как видно из многочисленных ситуаций, ранее исследованных для случая невращающегося слоя [16], это — эффект неоптимальности навязанного начальными условиями горизонтального масштаба течения: размеры ячейки по x и y заметно превышают оптимальный масштаб, и течение перестраивается к меньшему масштабу (для двумерной конвекции в невращающемся слое вопрос масштабного оптимума подробно обсуждался в вышеупомянутой книге [15, гл. 6]). Характерный вид ячеек указывает на закрутку течений, качественно схожую с той, что показана на рис. 1, но асимметричную по отношению к средней горизонтальной плоскости слоя. В конечном счете ячеечная структура разрушается, переходя в валиковую или в более сложную, неупорядоченную.

Хотя основной объем вычислений был выполнен для области с горизонтальными размерами, равными основным периодам начальных возмущений по x и y, делались также контрольные расчеты для областей, вдвое и втрое бóльших по обеим координатам, при сохранении величины пространственных шагов сетки. Оказалось, что в исследованной области параметров удвоение и утроение горизонтальных размеров области мало влияет не только на устойчивость течения, но также на значения и временнóе изменение максимальной скорости и средней спиральности поля скоростей.

Сравним зависимости амплитуды скорости и средней спиральности течения на этапе существования квазистационарных ячеек от стратификации и скорости вращения слоя (рис. 6). С уменьшением m, по мере увеличения кривизны статического

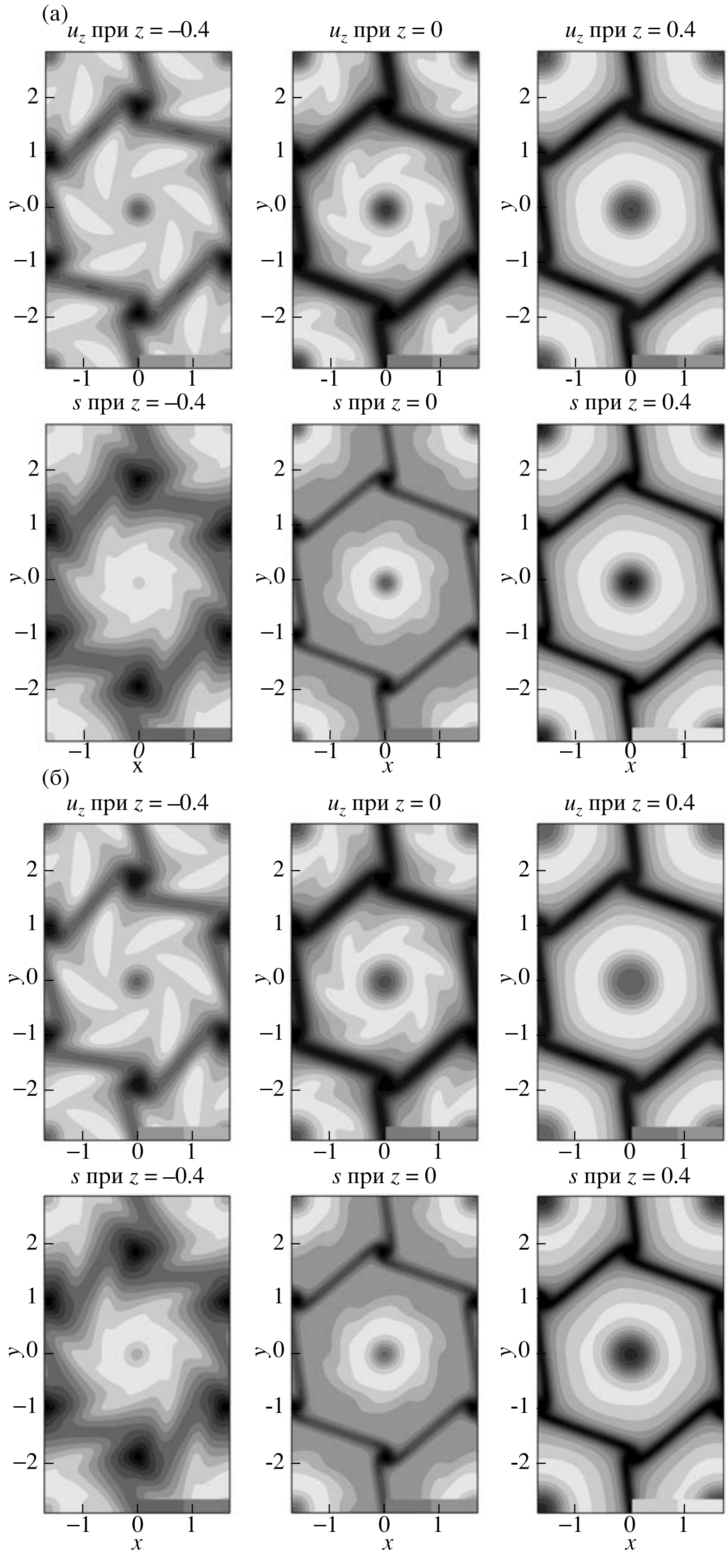

Рис. 4. Распределения вертикальной компоненты скорости (верхние ряды диаграмм) и возмущения энтропии (нижние ряды диаграмм) по трем горизонтальным сечениям конвективной ячейки на этапе квазистационарного режима при (а) $t = 40$ и (б) $t = 80$ в расчете для $\Omega = 0.04$, $m = 0.1$. Нулевые значения величин соответствуют переходу между оттенками серого тона, показанными в левой и правой половинах узкой горизонтальной полоски в правом нижнем углу каждой диаграммы.

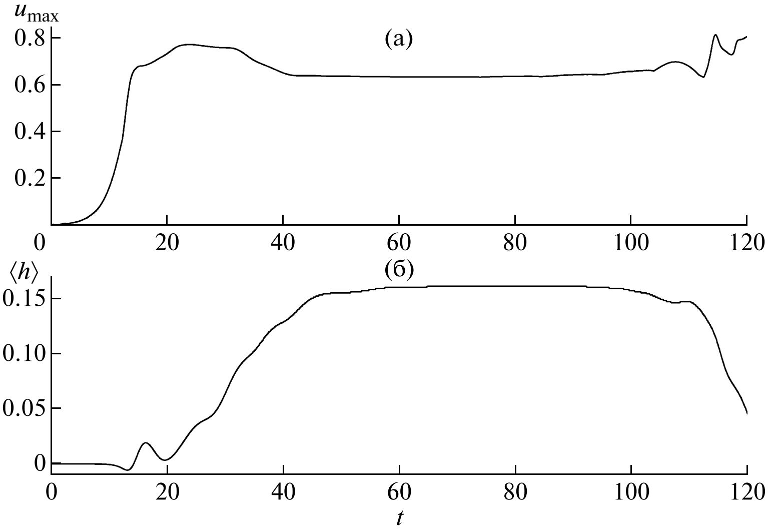

Рис. 5. Временны́е изменения (а) максимальной скорости в ячейке u_{max} и (б) средней спиральности $\langle h \rangle$ в расчете для $\Omega = 0.04$, $m = 0.1$.

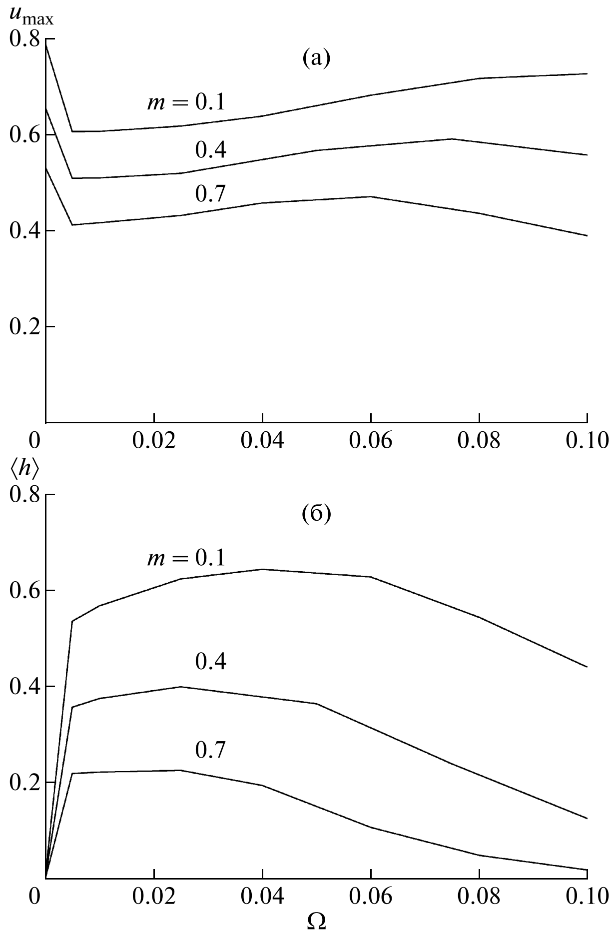

Рис. 6. Зависимость (а) максимальной скорости в ячейке u_{max} и (б) средней спиральности $\langle h \rangle$, определенных для режима установившейся конвекции, от угловой скорости Ω.

профиля энтропии (рис. 2), т.е. роста асимметрии между верхней и нижней частью слоя, все менее симметричным становится и высотное распределение $h(z)$ для данных x и y. Соответственно бóльших значений достигает и средняя по слою спиральность $\langle h \rangle$, а ее зависимость от Ω имеет ясно выраженный максимум. Это связано с тем, что рост Ω соответствует приближению к условиям теоремы Тейлора–Праудмана и приводит в конечном счете к подавлению конвекции. Однако, как видно из рис. 6, подавление спиральности опережает подавление конвекции.

Заметим, что Кичатинов [17], исследуя перенос момента импульса конвективной турбулентностью во вращающейся сжимаемой атмосфере, не получил в явном виде эффекта убывания средней спиральности течения со скоростью вращения при больши́х Ω. Согласно найденной им формуле, средняя спиральность $\langle h \rangle$ при $\Omega \to \infty$ стремится к некоторому постоянному значению. Но поскольку эта формула в качестве множителя содержит радиальный градиент среднеквадратичной турбулентной скорости, а быстрое вращение подавляет конвекцию и соответственно уменьшает эту скорость, убывание $\langle h \rangle$ при больши́х Ω должно, тем не менее, присутствовать.

Таким образом, при заданной стратификации существует некоторая скорость вращения, оптимальная для генерации спиральности течения. В качестве примера сделаем оценку для условий, лежащих в ожидаемом для Солнца диапазоне значений величин. Если принять $\Omega_{z\odot} \sim 2 \times 10^{-6}$ рад/с и ускорение силы тяжести $g_\odot \sim 260$ м/с, то для характерной толщины слоя $L \sim 60$ Мм получим значение используемой в наших расчетах единицы времени $t_0 = \sqrt{L/g_\odot} \sim 480$ с и соответственно безразмерную угловую скорость $\Omega \sim 10^{-3}$. Современные модели внутреннего строения солнечной конвективной зоны (см., например, [18]) дают для интервала глубин 0.1–$0.2 R_\odot$ условное (поскольку политропная стратификация — случай идеализированный) значение $m \sim 1$. Таким образом, точка на рис. 6б, соответствующая указанной скорости, вероятно, может лежать недалеко от максимума спиральности при $m = 1$. Однако для непосредственного определения величины α-эффекта в этих условиях требуется более полная информации о его связи со спиральностью, чем та, что имеется на сей день.

В целом же такие “детерминистские” исследования спиральности квазиупорядоченных конвективных течений должны открыть возможности для значительного уменьшения доли произвола в оценках, используемых теорией динамо средних полей.

Я весьма благодарен Л.Л. Кичатинову за обсуждение ряда вопросов и В. Доблеру (W. Dobler) за обстоятельные консультации по применению пакета Pencil Code.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Steenbeck, F. Krause, and K.-H. Rädler, Zs. Naturforsch. **21a**, 369 (1966).
2. M. Steenbeck and F. Krause, Zs. Naturforsch. **21a**, 1285 (1966).
3. P. Charbonneau, Living Rev. Solar Phys. **7**, article 3 (2010); (http://www.livingreviews.org/lrsp-2010-3).
4. Ф. Краузе, К.-Х. Рэдлер, *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо* (М.: Мир, 1984).
5. Г. Моффат, *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде* (М.: Мир, 1980).
6. A. D. Gilbert, U. Frisch, and A. Pouquet, Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. **42**, 151 (1988).
7. А. В. Гетлинг, Астрон. журн. **77**, 64 (2000).
8. A. V. Getling, Solar Phys. **239**, 93 (2006).
9. J. G. Beck, T. L. Duvall Jr., and P. H. Scherrer, Nature **394**, 653 (1998).
10. A. V. Getling and A. A. Buchnev, Solar Phys. **248**, 233 (2008).
11. А. В. Гетлинг, Астрон. журн. **78**, 661 (2001).
12. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1961; New York: Dover Publications, Inc., 1981).
13. A. Brandenburg, W. Dobler, http://www.nordita.org/software/pencil-code/.
14. A. Brandenburg, R. L. Jennings, Å. Nordlund, *et al.*, J. Fluid Mech. **306**, 325 (1996).
15. А. В. Гетлинг, *Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика* (М.: УРСС, 1999).
16. A. V. Getling and O. Brausch, Phys. Rev. E **67**, 046313 (2003).
17. L. L. Kichatinov, Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. **38**, 273 (1987).
18. M. Stix, *The Sun: An Introduction*, 2nd ed. (Berlin: Springer, 2002).