

Магнитогидродинамические эффекты солнечной конвекции

А. В. Гетлинг

Введение

В 1966 году я поступил в аспирантуру отделения ядерной физики физфака МГУ, и Борис Аркадьевич Тверской как мой научный руководитель предложил мне заняться развитием гипотезы о механизме формирования магнитных полей солнечных пятен, которую он выдвинул совсем незадолго до того (Тверской, 1966). Идея эта, оригинальная и красивая, остается до сих пор малоизвестной — на мой взгляд, совершенно незаслуженно. Между тем, она естественно и легко преодолевает те серьезные трудности, которые встречает самая популярная в настоящее время модель — модель всплывающей трубки (см., в частности, работу Паркера, 1955). На них большинство исследователей закрывают глаза — вероятно, просто привыкнув к элементарному, хотя и не слишком убедительному объяснению.

Традиционная модель возникновения магнитного поля биполярной группы пятен основана на предположении о том, что на некоторой глубине под фотосферой Солнца залегает силовая трубка магнитного поля. Напряженность этого поля должна локально достигнуть столь большой величины, чтобы трубка всплыла благодаря действию так называемой магнитной плавучести (Паркер, 1955): сильное магнитное поле H расширяет газ, его давление уменьшается на величину $H^2/8\pi$, понижается плотность и возникает архимедова сила. В результате участок трубки, изгибаясь, всплывает и пересекает фотосферу в двух местах. Благодаря подавлению конвекции магнитным полем образуются два пятна противоположных магнитных полярностей — биполярная группа пятен. Для объяснения локального усиления поля привлекаются различные дополнительные механизмы.

Главное противоречие этой модели с наблюдаемой на Солнце картиной состоит в том, что в любом случае магнитное поле в трубке изначально должно быть достаточно сильным, а в таком случае оно заметно влияло бы на наблюдаемый характер солнечной конвекции. Это влияние становилось бы разительным на этапе всплытия: было бы видно, как растекается в разные стороны вещество над всплывающей трубкой и не остается даже следов от того поля скоростей, которое сложилось в данном участке фотосферы к началу развития процесса. На определенном этапе до возникновения группы пятен всплывающее магнитное поле должно наблюдаться как область преимущественно горизонтальной ориентации вектора магнитной напряженности, которая при этом должна быть велика по абсолютной величине. Ничего этого на самом деле нет. Развитие магнитного поля пятна (группы пятен) происходит в полном согласии с уже имеющимся полем конвективных скоростей (см., например, обзор Бумбы, 1967). Магнитное поле постепенно «просачивается» сквозь фотосферу

и усиливается, не нарушая картины течений. Магнитный вектор при этом совпадает по направлению с вектором скорости течения, т.е. он, грубо говоря, вертикален в областях восходящих и нисходящих движений и горизонтален там, где течение направлено по горизонтали. Другой примечательный факт, сообщаемый Бумбой, состоит в том, что распределение пятен по площадям имеет ясно выраженные пики вблизи величин, кратных площади супергранулы. Такую «квантованность» площадей пятен вряд ли можно объяснить моделью всплывающей трубки, но она будет выглядеть совершенно естественной, если окажется, что именно течения в супергранулах формируют магнитные поля пятен.

Идея Б. А. Тверского состояла как раз в том, чтобы связать процесс локального усиления магнитного поля с конвективными течениями вещества, течениями не гипотетическими, а вполне реально наблюдаемыми в супергранулах — ячейках поля скоростей с характерным размером порядка 30 000 км. Циркулирующая в ячейке солнечная плазма может, «наматывая» магнитные силовые линии, усиливать поле до больших напряженностей и формировать магнитную конфигурацию, типичную для биполярной группы пятен. При таком понимании явлений полностью отпадает надобность в каких-либо искусственных предположениях о предварительном формировании трубки сильного магнитного поля, а картина, предсказываемая на основе предлагаемой модели, оказывается вполне согласующейся с наблюдениями. Силовые линии, естественно, должны вытягиваться вдоль линий тока, а векторное поле магнитной напряженности — давать картину постепенного «просачивания» магнитного потока сквозь солнечную поверхность. Как будет видно из дальнейшего, эта модель обладает еще одной интересной чертой: она не только описывает формирование сильного магнитного поля из слабого, а более того, предсказывает тем большую достижимую в конечном итоге напряженность, чем слабее было поле начальное.

В первоначальном варианте предложенная Б. А. Тверским модель была чисто кинематической: движение вещества считалось заданным и не зависящим от магнитного поля. В рамках такого подхода удалось достичь ряда обобщений (Гетлинг, Тверской, 1968; Гетлинг, 1968, 1969), а также обосновать возможность действия глобального солнечного гидромагнитного динамо исходя из представления об ансамбле тороидальных вихрей (ячеек) с азимутальной (кориолисовой) компонентой скорости, распределенных по всей конвективной оболочке Солнца (Гетлинг, Тверской, 1971). К сожалению, дальнейшая судьба модели сложилась не слишком удачно. По моему глубокому убеждению, по-настоящему обосновать ее количественно и довести до уровня теории пятнообразовательного процесса можно лишь выполнив расчеты эволюции трехмерного течения и трехмерного магнитного поля, основанные на полной нелинейной системе уравнений магнитной гидродинамики. Ситуация, таким образом, диктует единственный путь — численное моделирование. Но возможности детального численного описания трехмерных магнитоконвективных течений даже сейчас весьма ограничены. Поэтому, несмотря на давно предпринимаемые мною попытки,¹ только в самое последнее время удалось приблизиться к адекватному описанию процесса.

¹В течение некоторого времени в этой работе участвовал также Б. В. Магницкий

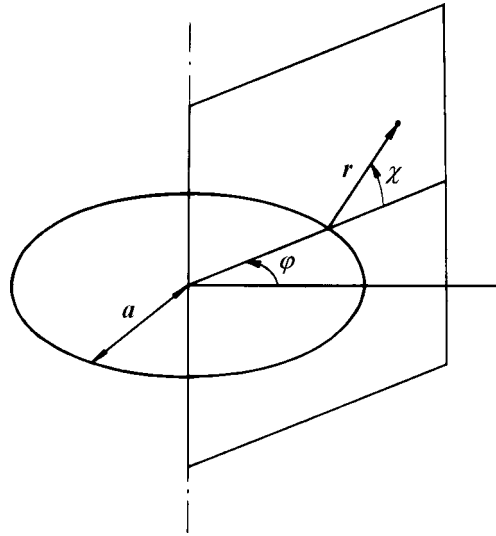


Рис. 1. Система координат χ , r , φ

Вопрос о механизме формирования магнитных полей солнечных пятен — один из ключевых в физике Солнца. Поэтому получение убедительных численных результатов, относящихся к рассматриваемому механизму, я считаю задачей, оправдывающей даже весьма долгие и значительные усилия. Работа продолжается, и я кратко опишу здесь как первичные представления о механизме усиления поля, выработанные около 30 лет назад, так и сегодняшнее состояние вопроса.

Кинематическая модель

Рассмотрим процесс взаимодействия течения проводящей жидкости² с магнитным полем, задав некоторое стационарное поле скоростей, имитирующее движение в конвективной ячейке (например, в солнечной супергрануле). Иначе говоря, будем считать достаточно слабым тормозящее воздействие магнитного поля на течение (о пределах применимости этого допущения речь пойдет позже).

Первый вариант этой задачи (Тверской, 1966) относился к осесимметричному полю скоростей, где в каждой меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$ (здесь φ — азимутальный угол) траектории жидких частиц представляют собой концентрические окружности, причем совокупность окружностей заданного радиуса r , лежащих на плоскостях со всевозможными φ , образует поверхность кругового тора (так будет, если центры всех линий тока $r = 0$ лежат на одной окружности радиуса a в плоскости, перпендикулярной оси симметрии). При этом удобно воспользоваться ортогональной системой координат χ , r , φ , где χ — еще один азимутальный угол, он измеряется в плоскости $\varphi = \text{const}$ (рис. 1). Параметрами Ляме в этой системе

²Слово *жидкость* здесь употребляется в значении *жидкость или газ*, как это обычно делается в литературе по гидромеханике, и в применении к солнечному веществу, естественно, означает *газ*.

координат являются

$$h_\chi = r, \quad h_r = 1, \quad h_\varphi = a + r \cos \chi. \quad (1)$$

Из условия несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r(a + r \cos \chi)} \frac{\partial}{\partial \chi} [(a + r \cos \chi)v_\chi] = 0 \quad (2)$$

следует, что

$$v = v_\chi = \frac{V(r)}{1 + (r/a) \cos \chi}, \quad (3)$$

где $V(r)$ — некоторая функция, которую следует положить равной нулю за пределами тора $r = r_0$ (r_0 — некоторый параметр; $r_0 < a$), т.е. при $r \geq r_0$.

Получим решение задачи сразу для обобщенной геометрии течения (Гетлинг, Тверской, 1968; Гетлинг, 1969). А именно, будем считать поле скоростей результатом некоторой деформации описанного тороидального вихря. Эту деформацию положим произвольной в пределах того ограничения, что ортогональная криволинейная система координат q_1, q_2, q_3 может быть введена аналогично описанной системе χ, r, φ , так что линии q_1 будут траекториями жидких частиц. Не вдаваясь в анализ условий выполнимости этого требования, отметим лишь следующее. Во-первых, такого рода система координат позволяет описывать любой формы линии тока, которые могут возникать в поперечном сечении вихря — нужно лишь, чтобы линии q_1 в плоскости $q_3 = \text{const}$ образовывали однопараметрическое семейство, параметр которого можно выбрать в качестве координаты q_2 . Во-вторых, требование ортогональности будет заведомо выполнено, если деформированное вихревое кольцо составлено из кусков, в каждом из которых поле скоростей обладает либо трансляционной, либо вращательной симметрией — иными словами, если линии q_3 состоят из отрезков прямых и дуг окружностей. В-третьих, в отличие от упомянутого случая тороидального вихря, не требуется симметрии поля скоростей, и скорость может произвольно зависеть от координаты q_3 — аналога координаты φ .

Итак, пусть h_1, h_2, h_3 — параметры Ляме введенной координатной системы, причем переменные q_1 и q_3 нормированы так, что при полном обходе соответствующих замкнутых координатных линий они пробегают значения от 0 до 2π . Условие несжимаемости теперь будет иметь вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 v_1) = 0, \quad (4)$$

откуда следует, что

$$v = v_1 = \frac{V(q_2, q_3)}{h_2 h_3} \quad (5)$$

($v_2 = v_3 = 0$), где $V(q_2, q_3)$ — функция, произвольно заданная в области $q_2 < q_0$ и равная нулю в области $q_2 \geq q_0$ (q_0 — аналог параметра r_0).

Допустим, что электропроводность жидкой среды бесконечна, и динамика магнитного поля \mathbf{H} в ней описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}], \quad (6)$$

которое в покомпонентной записи имеет вид

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 v H_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_2 v H_3)}{\partial q_3} \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial(h_3 H_2)}{\partial t} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial(h_3 v H_2)}{\partial q_1}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(h_2 H_3)}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial(h_2 v H_3)}{\partial q_1}. \quad (9)$$

Будем искать частные решения уравнений (8) и (9) в виде

$$f(q_1, q_2, q_3) e^{i\omega(q_2, q_3)t}. \quad (10)$$

Тогда, как нетрудно убедиться, f должно иметь вид

$$f = \phi(q_2, q_3) e^{-i\omega(q_2, q_3)\Phi(q_1, q_2, q_3)}, \quad (11)$$

где $\phi(q_2, q_3)$ — произвольная функция, а

$$\Phi(q_1, q_2, q_3) = \int_0^{q_1} \frac{dq_1}{u(q_1, q_2, q_3)}. \quad (12)$$

Условие периодичности $f(q_1, q_2, q_3)$ по q_1 приводит к дискретному спектру значений частоты ω :

$$\omega_n = n\Omega(q_2, q_3), \quad \Omega(q_2, q_3) = \frac{2\pi}{\Phi(2\pi, q_2, q_3)} \quad (13)$$

Функции

$$f_n = e^{-in\Omega\Phi} = \exp \left\{ -2n\pi \frac{\Phi(q_1, q_2, q_3)}{\Phi(2\pi, q_2, q_3)} \right\} \quad (14)$$

ортогональны по q_1 относительно веса $\partial(\Omega\Phi)/\partial q_1$. Они образуют полную систему, так как заменой $z = \Omega\Phi$ сводятся к функциям e^{-inz} , причем Φ при фиксированных q_2 и q_3 меняется с q_1 монотонно, и зависимость $q_1(z)$ однозначна. Заметим, что f_n периодичны по q_3 , поэтому функции $\phi(q_2, q_3)$ также должны периодически зависеть от q_3 , и в частном решении можно положить $\phi = A(q_2) e^{imq_3}$. Теперь любое решение уравнений (8) и (9) может быть представлено комбинацией функций

$$H_2^{mn} = h_2 A_2^{mn}(q_2) e^{i(mq_3 - n\Omega\Phi)}, \quad (15)$$

$$H_3^{mn} = h_3 A_3^{mn}(q_2) e^{i(mq_3 - n\Omega\Phi)}. \quad (16)$$

Соответствующие гармоники компоненты B_1 находятся путем подстановки (15) и (16) в (7) и интегрирования по t . При $n \neq 0$ они имеют вид

$$\begin{aligned}
H_1^{mn} = & \frac{1}{in\Omega} \frac{V(q_2, q_3)}{h_2 h_3} \left\{ \frac{1}{V} \left(A_2^{mn} \frac{\partial V}{\partial q_2} + A_3^{mn} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) - in\Omega \left(A_2^{mn} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + A_3^{mn} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{dA_2^{mn}}{dq_2} + imA_3^{mn} + in \left(A_2^{mn} \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} + A_3^{mn} \frac{\partial \Omega}{\partial q_3} \right) \left(t - \frac{1}{in\Omega} - \Phi \right) \right\} e^{i[mq_3 + n\Omega(t - \Phi)]} + \\
& + B^{mn}(q_1, q_2, q_3) e^{i(mq_3 - n\Omega\Phi)}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Функции $A_2^{mn}(q_2)$, $A_3^{mn}(q_2)$ и $B^{mn}(q_1, q_2, q_3)$ определяются из начальных условий. Если $n = 0$, то компоненты магнитного поля представляются гармониками

$$H_2^{m0} = h_2 A_2^{m0}(q_2) e^{imq_3}, \quad H_3^{m0} = h_2 A_3^{m0}(q_2) e^{imq_3}, \tag{18}$$

$$H_1^{m0} = \left\{ t \frac{V(q_2, q_3)}{h_2 h_3} \left[\frac{1}{V} \left(A_2^{mn} \frac{\partial V}{\partial q_2} + A_3^{mn} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) + \frac{dA_2^{mn}}{dq_2} + imA_3^{mn} \right] + B^{m0} \right\} e^{imq_3}. \tag{19}$$

Видно, что основная гармоника ($n = 0$) составляющей поля H_1 , направленной вдоль линий тока, линейно возрастает со временем. После того как эта гармоника становится гораздо больше начального поля $B^{m0} e^{imq_3}$, ее пространственное распределение можно считать неизменным, а абсолютную величину — растущей пропорционально t . Начальная напряженность определяет и величину составляющих H_2^{mn} и H_3^{mn} , не меняющихся со временем. Поэтому при достаточно большом t магнитные силовые линии, которыми можно представить основную гармонику векторного поля \mathbf{H} , будут практически совпадать с линиями тока.

Гармоники с $n \neq 0$, которые описывают более тонкие детали структуры поля, колеблются с растущей амплитудой, а их пространственные периоды уменьшаются благодаря множителю $e^{in\Omega t}$.

Процесс усиления поля описанным вихрем можно наглядно представить себе как наматывание силовых линий. Если скорость течения слабо зависит от координаты q_3 , а начальное магнитное поле направлено по горизонтали и близко к однородному, то и в процессе дальнейшей эволюции в спектре магнитного поля основными будут гармоники с $m = 1$. Именно такого рода случай (а именно, случай осесимметричного тороидального вихря и однородного горизонтального начального поля) иллюстрирует рис. 2. Образование двух сгущений силовых линий усиленного поля в диаметрально противоположных частях вихревого кольца — у концов того диаметра, который совпадает по направлению с начальным полем — как раз соответствует росту гармоник с $m = 1$. Если считать, что присевая область неподвижного вещества мала по размерам, иначе говоря, внутренний диаметр вихря много меньше внешнего (в случае тороидального вихря это условие выглядит как $a - r_0 \ll a$), то соответствующим выбором поля скоростей в меридиональном сечении такой вихрь можно будет сделать похожим на конвективную ячейку (классический пример которой — шестиугольная ячейка Бенара — показана в горизонтальном сечении ниже на

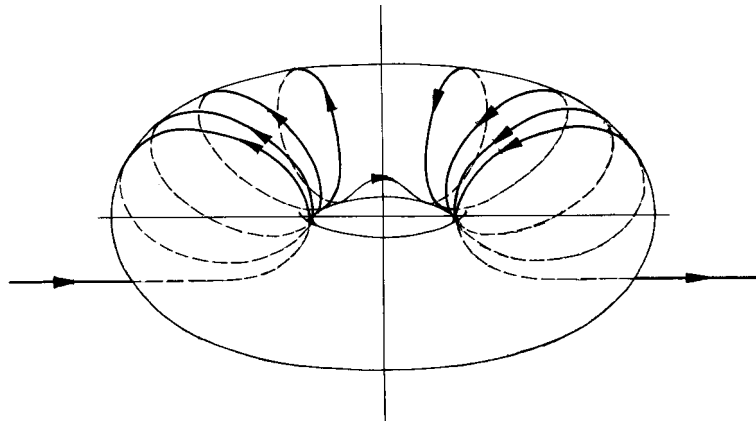


Рис. 2. Наматывание силовых линий изначально однородного горизонтального магнитного поля осесимметричным тороидальным вихрем

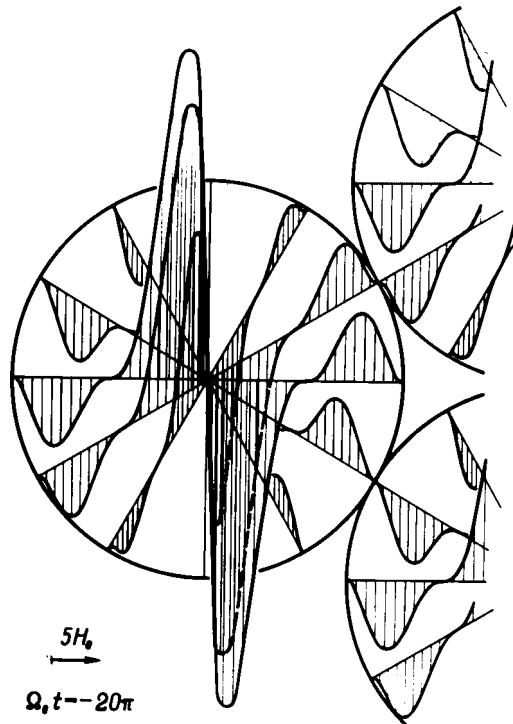


Рис. 3. Распределение вертикальной компоненты H_2^{10} основной гармоники усиленного магнитного поля в плоскости среднего горизонтального сечения вихря для случая, когда поле скоростей имеет структуру конвективной ячейки, а начальное магнитное поле \mathbf{H}_0 горизонтально и однородно (Гетлинг, 1969). Расчет выполнен для момента времени, когда $\Omega_0 t = -20\pi$ [здесь $-\Omega_0$ — максимальное по модулю значение Ω ; см. (13)]. Масштаб, в котором представлены значения H_2^{10} , показан стрелкой в левом нижнем углу рисунка

рис. 5, *a*, и 6, *a*). Само же усиленное поле будет напоминать своей конфигурацией поле биполярной группы пятен (рис. 3).

Чтобы составить представление об эффективности описанного механизма формирования магнитных полей пятен, необходимо сделать оценки скорости диссипации магнитного поля (от которой зависит применимость уравнения (6) для идеально проводящей среды) и электромагнитной силы Ампера, тормозящей поток вещества (от нее зависит применимость кинематического приближения).

Примем значение проводимости $\sigma \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, характерное для зоны супергрануляции. Тогда, согласно уравнению индукции для среды конечной проводимости

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}, \quad (20)$$

даже в масштабе $L \sim 10^6 \text{ см}$ (на три с половиной порядка меньшем размера супергранулы) характерное время диффузии магнитного поля составит

$$\tau \sim \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} \sim 10^7 \text{ с}, \quad (21)$$

т.е. несколько месяцев. Эту величину могут заметно понизить турбулентные пульсации, которые уменьшают характерный масштаб, определяющий диссипацию. Поэтому оценка (21) соответствует лишь верхней границе значений величины τ . Далее, проводимость падает с приближением к поверхности фотосферы. Поэтому если конвективная циркуляция охватывает большой интервал высот, в картине ее взаимодействия с магнитным полем возможны заметные отклонения от описания, даваемого идеальной моделью. Тем не менее, характерная величина проводимости, использованная для нашей оценки, показывает настолько большой «запас прочности» этой модели, что едва ли можно ожидать радикальных отличий реального процесса от его модельного описания.

Более тонкий вопрос связан с оценкой роли торможения, поскольку решение задачи было нами получено в виде сложного спектра гармоник (15)–(19) с разнообразной пространственной структурой. В качестве критерия для такой оценки можно использовать величину

$$\mathcal{T} = \frac{\rho v^2}{2\langle \mathbf{fv} \rangle}, \quad (22)$$

где ρ и v — характерные значения плотности и скорости течения в конвективной ячейке, \mathbf{f} — тормозящая сила, а усреднение производится по координате q_2 для такого q_1 , при котором f и v имеют средние, характерные значения. Торможение следует считать сильным, если $\mathcal{T} \lesssim 2\pi/|\Omega_0|$. Процедура оценки (Гетлинг, 1969) предполагает сравнение вкладов различных гармоник и довольно трудоемка. Обратимся сразу к ее окончательным результатам.

Торможение в основном определяется произведением $H_2^{10} \partial H_1^{10} / \partial q_2$, причем первый множитель по порядку величины соответствует начальному полю H_0 , а второй, представляющий собой величину электрического тока, растет как первая

степень t . Если положить $2\pi/|\Omega_0| = 10^5$ с, $l = 10^9$ см, $H_0 = 10$ Э, $\rho = 2 \cdot 10^{-4}$ г/см³, то для момента, когда $|\Omega_0|t = 20\pi$ и поле усилено до нескольких сот или даже до 1000 эрстед, получается $\mathcal{T} \sim 10^6$ с, т.е. такие значения напряженности достижимы. Но поле может вырасти и до бóльших значений — для этого требуется либо более энергичная ячейка, либо более слабое начальное поле. Таким образом, рассмотренный механизм имеет интересную особенность: чем слабее начальное поле, тем меньше тормозящая сила при данной величине усиленного поля, тем бóльшие значения напряженности могут быть получены в конечном итоге.

С другой стороны, совершенно не очевидно, что в процессе усиления магнитного поля течение в ячейке сохранит свою устойчивость. Но здесь стоит еще раз заметить, что усиливаемое поле направлено вдоль линий тока, а компонента, перпендикулярная вектору скорости, остается слабой. Это значит, что течение как бы прокладывает себе «рельсы» в виде силовых линий усиленного поля, которые должны противодействовать изменениям конфигурации течения. Таким образом, усиление магнитного поля в конвективной ячейке должно (при подходящем сочетании параметров) оказывать «консервирующее» влияние на течение. Это — другое примечательное свойство данного механизма, которое дает основания предполагать его осуществимость в солнечных условиях.

Если говорить о подробностях возможных гелиофизических приложений модели, то многое может стать ясным лишь после подведения под нее основательной расчетной базы. Основная идея состоит в том, что к моменту начала развития группы пятен никакого «готового» сильного магнитного поля нет, а та ячейка-супергранула, в которой сочетание условий оказывается благоприятным для действия описанного механизма, пронизана слабым «затравочным» полем. Это поле едва ли может быть слишком упорядоченным, но его усредненный в пространстве вектор следует отождествить с крупномасштабным тороидальным магнитным полем. (Наличия такой преимущественной направленности магнитного поля в начальный момент в принципе достаточно для того, чтобы в дальнейшем оно эволюционировало в качественном согласии с описанной схемой.) Затравочное поле, следовательно, должно управляться глобальными динамо-процессами и вносить глобальную упорядоченность в расположение групп пятен. Не что иное как конвекция в масштабах супергранул и пятен будет при этом служить связующим звеном между глобальными и локальными процессами.

Нелинейное численное моделирование

Теперь обсудим возможности построения полной нелинейной численной модели процесса и шаги в этом направлении, к настоящему времени уже сделанные.

Весьма эффективный способ численного решения нелинейных систем уравнений, описывающих трехмерные магнитогидродинамические течения, основан на применении спектральных (галеркинских) разложений и процедуры быстрого преобразования Фурье. В случае достаточно простой геометрии задачи он обладает се-

резными преимуществами перед конечно-разностными методами. Краткий очерк возможностей и достоинств этой техники можно найти, например, в книге Гетлинга (1999).

Поставим задачу следующим образом. Для плоского горизонтального слоя электропроводной жидкости толщиной d , подогреваемого снизу, требуется решить систему уравнений магнитной гидродинамики в так называемом приближении Буссинеска (см., например, Гетлинг, 1999), при котором вариации плотности считаются пренебрежимо малыми везде, кроме члена, пропорционального ускорению силы тяжести g (этот член описывает архимедову силу, ответственную за само явление конвекции). Хотя приближение Буссинеска и предполагает несжимаемость жидкости, но оно позволяет выявить многие важные черты явлений и в случае солнечной конвективной зоны, которую считать несжимаемой, конечно, нельзя.

Представим себе, что рассматриваемый слой ограничен снизу и сверху массивами идеально проводящего вещества, а температуры T_1 и T_2 его нижней и верхней поверхности поддерживаются постоянными, причем разность этих температур равна ΔT . Представим каждую переменную f задачи в виде суммы ее *невозмущенного* значения f_0 , соответствующего неподвижному состоянию вещества, и *возмущения*, которое возникает благодаря течению (оно, вообще говоря, может даже существенно превосходить невозмущенную величину). Будем считать, что невозмущенное магнитное поле однородно и его вектор \mathbf{H}_0 лежит в плоскости (x, z) под произвольным углом к поверхностям слоя. Возмущение магнитного поля, измеряемое в единицах H_0 , обозначим как \mathbf{h} . Возмущение температуры, т.е. ее отклонение от равновесного линейного профиля $T_0 = T_1 - \Delta T (z/d)$, выраженное в единицах ΔT , будем обозначать как θ . В качестве единицы длины выберем d , а единицы времени — характерное время $t_\nu = d^2/\nu$ вязкой диссипации в масштабе d (здесь ν — кинематическая вязкость). Обозначим безразмерную скорость как \mathbf{u} и запишем исходную систему уравнений в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla\varpi + \frac{R}{P_1}\hat{\mathbf{z}}\theta - \frac{Q}{P_2}([\hat{\mathbf{H}}_0 \text{rot } \mathbf{h}] + [\mathbf{h} \text{rot } \mathbf{h}]) + \Delta \mathbf{u}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{u}\hat{\mathbf{H}}_0] + \text{rot} [\mathbf{u}\mathbf{h}] + \frac{1}{P_2}\Delta \mathbf{h}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - u_z + (\mathbf{u}\nabla)\theta = \frac{1}{P_1}\Delta \theta, \quad (25)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (26)$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0. \quad (27)$$

Здесь $\hat{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{H}_0/H_0$, а $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор, направленный вдоль координатной оси z — вертикально вверх. Величина ϖ есть безразмерная форма выражения p'/ρ_0 (где p' — возмущение давления). Безразмерные параметры

$$R = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \chi}, \quad Q = \frac{H_0^2 d^2}{4\pi \rho_0 \nu \nu_m} = \frac{H_0^2 d^2 \sigma}{\rho_0 c^2 \nu}, \quad P_1 = \frac{\nu}{\chi}, \quad P_2 = \frac{\nu}{\nu_m} = \frac{4\pi \sigma \nu}{c^2} \quad (28)$$

(где α — объемный коэффициент теплового расширения жидкости, χ — ее темпера-

туропроводность, σ — проводимость, а ν_m — магнитная вязкость) называются соответственно числом Рэлея, числом Чандрасекара, обычным числом Прандтля и магнитным числом Прандтля.

Поверхности слоя будем считать свободными и непроницаемыми, т.е. зададим условия обращения в ноль нормальной (вертикальной) скорости и тангенциальных напряжений:

$$u_z = \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \quad (29)$$

Граничные условия для магнитного поля в случае бесконечной проводимости ограничивающих слоев массивов имеют вид, вполне аналогичный (29):

$$h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} = \frac{\partial h_y}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \quad (30)$$

Температурные возмущения, согласно постановке задачи, обращаются в ноль на границах слоя:

$$\theta = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \quad (31)$$

Будем аппроксимировать поле скоростей, магнитное поле и поле температурного возмущения суммами

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\|\mathbf{k}\| < \|\mathbf{K}\|} \mathbf{U}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (32)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\|\mathbf{k}\| < \|\mathbf{K}\|} \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (33)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{\|\mathbf{k}\| < \|\mathbf{K}\|} \Theta(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (34)$$

Здесь $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ (далее вместо x, y, z будем писать x_1, x_2, x_3 и соответственно различать компоненты векторов индексами 1, 2, 3), $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$, каждое k_α ($\alpha = 1, 2, 3$) кратно некоторому основному волновому числу по пространственной координате x_α , а $\|\mathbf{k}\| < \|\mathbf{K}\|$ означает $-K_\alpha < k_\alpha < K_\alpha$, и таким образом задаются конечные границы спектра переменных $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ и $\theta(\mathbf{x}, t)$. В частности, если все используемые значения k_3 кратны π , то нетрудно задать такие условия четности (нечетности) по k_3 для каждой компоненты \mathbf{U} и \mathbf{B} и для Θ , что базисные функции $e^{ik_3x_3}$ с одинаковыми $|k_3|$ будут образовывать комбинации $\sin k_3x_3$ и $\cos k_3x_3$, удовлетворяющие граничным условиям (29)–(31).

Поскольку поля \mathbf{u} , \mathbf{h} и θ действительны,

$$\mathbf{U}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{U}(-\mathbf{k}, t)^*, \quad (35)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{B}(-\mathbf{k}, t)^*, \quad (36)$$

$$\Theta(\mathbf{k}, t) = \Theta(-\mathbf{k}, t)^*, \quad (37)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

Уравнения (23)–(27), записанные в спектральной форме, после исключения давления принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_\alpha(\mathbf{k}) = & i \left(\frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2} - \delta_{\alpha\gamma} \right) k_\beta \left\{ \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} U_\beta(\mathbf{p})U_\gamma(\mathbf{q}) - \frac{Q}{P_2} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} B_\beta(\mathbf{p})B_\gamma(\mathbf{q}) \right\} - \\ & - \frac{R}{P_1} \left(\frac{k_\alpha k_3}{k^2} - \delta_{\alpha 3} \right) \Theta(\mathbf{k}, t) + i \frac{Q}{P_2} (k_\beta \hat{\mathbf{H}}_{0\beta}) B_\alpha(\mathbf{k}) - k^2 U_\alpha(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_\alpha(\mathbf{k}) = & i k_\beta \left\{ \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} U_\alpha(\mathbf{p})B_\beta(\mathbf{q}) - \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} B_\alpha(\mathbf{p})U_\beta(\mathbf{q}) \right\} + \\ & + i (k_\beta \hat{\mathbf{H}}_{0\beta}) U_\alpha(\mathbf{k}) - \frac{k^2}{P_2} B_\alpha(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\dot{\Theta}(\mathbf{k}) = -i k_\beta \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} U_\beta(\mathbf{p}, t) \Theta(\mathbf{q}, t) + U_3(\mathbf{k}, t) - \frac{k^2}{P_1} \Theta(\mathbf{k}, t), \quad (40)$$

$$k_\alpha U_\alpha(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (41)$$

$$k_\alpha B_\alpha(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (42)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени (и для краткости переменная t как аргумент везде опущена), $\|\mathbf{p}\| < \|\mathbf{K}\|$, $\|\mathbf{q}\| < \|\mathbf{K}\|$, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, а по немym греческим индексам производится суммирование.

Физические поля, эволюцию которых можно исследовать путем интегрирования системы (38)–(42) по времени, периодичны по x и y . Для уменьшения числа переменных естественно выбрать начало координат таким образом, чтобы для спектральных коэффициентов \mathbf{U} , \mathbf{B} и Θ имели место определенные соотношения четности и по k_1 , и k_2 . В сочетании с уже оговоренными соотношениями четности по k_3 они должны обеспечивать выполнение требований (35)–(37).

Особенность галеркинской техники, создающая определенные трудности в достижении вычислительной эффективности метода — наличие сверток $\sum U_\alpha(\mathbf{p}, t)U_\beta(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t)$ (и аналогичных) в правых частях спектральных уравнений (38)–(40). Непосредственное вычисление этих сумм, порожденных нелинейностью исходных уравнений, требует непомерных затрат времени, если только не ограничиваться очень малым числом гармоник в (32)–(34) или в аналогичном разложении. Однако эта трудность весьма успешно преодолевается с помощью процедуры фурье-преобразования (Орсаг, 1971), поскольку весьма эффективный алгоритм быстрого преобразования Фурье (Кулей, Тьюки, 1965) позволяет свести вычисление сверток к перемножению полей в физическом пространстве. На каждом шаге вычислений спектры преобразуются в пространственные поля, а их произведение затем снова переводится в спектр. Это дает колоссальное ускорение вычислений.

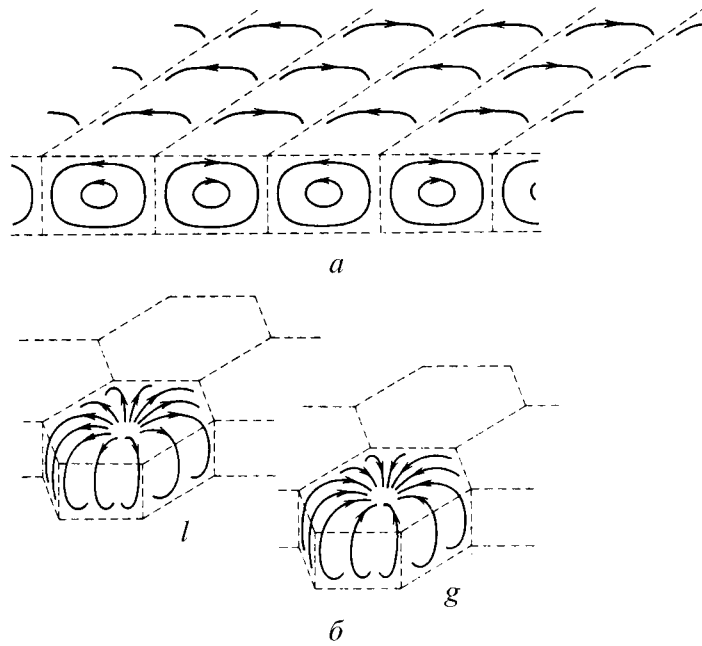


Рис. 4. Схематическое изображение конвективных ячеек: *a*—двумерные валы, *б*—шестиугольные ячейки *l*- и *g*-типа (отличающиеся направлением течения; *l*-тип характерен для жидкостей, *g*-тип — для газов)

Тем не менее, если применяются, скажем, ПЭВМ класса Пентиум, то расчеты с большим числом гармоник ($K_\alpha \geq 32$) требуют очень больших затрат времени даже с использованием техники фурье-преобразования. (Заметим, что наиболее рационально полагать K_α равными целым степеням числа 2.) Впрочем, уловить главные черты поведения решений в ряде случаев удастся уже при $K_\alpha = 16$.

Алгоритм решения описанной задачи реализован в виде пакета программ на фортране-77. Для интегрирования по времени применяется метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности; в дальнейшем он, возможно, будет заменен на другой (если тот окажется более эффективным).

На начальном (но довольно длительным) этапе работы необходимо нащупать ту область пространства параметров, где должны проявлять себя интересующие нас эффекты, а конечной целью является достаточно подробное исследование зависимости режимов магнитогидродинамического конвективного течения от параметров R , Q , P_1 , P_2 . Еще одним параметром задачи является угол наклона поля \mathbf{H}_0 к горизонтали, но для выявления пятнообразовательной эффективности описанного механизма наиболее важно исследовать случай горизонтального \mathbf{H}_0 , которым мы пока и ограничимся.

Если говорить о структуре поля скоростей, то двумя качественно различными типами течений являются трехмерные (например, шестиугольные) *ячейки* и двумерные *валы* (рис. 4).

Форму конвективных ячеек в плане (планформу) можно описывать распределением вертикальной скорости в средней плоскости $z = 1/2$ слоя — функцией планформы $w(x, y) = u_z(x, y, 1/2)$. Для двумерных валов (рис. 4, а) эта функция в первом приближении имеет вид

$$w(x, y) = \cos \mathbf{kx}, \quad (43)$$

где $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$, $\mathbf{x} = \{x, y\}$. Если волновой вектор \mathbf{k} ориентирован в направлении x , то валы (в этом случае параллельные оси y) называются x -валами.

Шестиугольные ячейки (рис. 4, б) в идеальном случае описываются функцией планформы

$$\begin{aligned} w(x, y) &= 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} kx \right) \cos \left(\frac{1}{2} ky \right) + \cos ky = \\ &= \cos \left[\frac{k}{2} (y + \sqrt{3}x) \right] + \cos \left[\frac{k}{2} (y - \sqrt{3}x) \right] + \cos ky. \end{aligned} \quad (44)$$

Система таких ячеек представляет собой суперпозицию трех систем валов с волновыми векторами, имеющими один и тот же модуль k и направленными под углом $2\pi/3$ друг к другу. Таким образом, помимо периодичности в направлениях x и y , структуры, образованные шестиугольниками, обладают инвариантностью по отношению к повороту на этот угол.

Исследования конвекции без магнитного поля (см., например, обзор в книге Гетлинга, 1999) дали следующий важный результат. Пусть физические характеристики вещества в слое мало меняются с высотой, и их распределение можно с достаточной точностью считать симметричным относительно плоскости $z = 1/2$. Пусть, кроме того, граничные условия на верхней и нижней поверхности слоя одинаковы. Тогда в широком диапазоне значений чисел Рэлея и Прандтля наиболее типичной формой конвективных течений являются валиковые структуры. Области устойчивости трехмерных течений гораздо уже.

Если жидкость является проводником и имеется наложенное извне горизонтальное магнитное поле, то его могут усиливать лишь трехмерные конвективные ячейки. Двумерные валы могли бы усиливать его компоненту, направленную перпендикулярно им (например, x -валы — компоненту H_x), если бы они были устойчивы в магнитном поле. В действительности, как легко понять даже из качественных рассуждений, валы выстраиваются так, чтобы этой компоненты не было — вдоль исходного магнитного поля. Дело в том, что при такой ориентации не возникает силы Ампера, противодействующей течению. Усиление магнитного поля требует работы против силы Ампера, и поэтому в данном случае невозможно. Если говорить на языке наглядных магнитогидродинамических образов, то валы, направленные вдоль магнитного поля, не деформируют силовые линии, а лишь переносят их, непрерывно замещая одни линии другими — такими же прямыми и горизонтальными. Это значит, что магнитное поле не изменяется, и следовательно, не изменяется его энергия, т.е. течение с магнитным полем не взаимодействует.

Хотя начальное магнитное поле \mathbf{H}_0 и стремится сделать течение двумерным, но если компонента магнитного поля, направленная вдоль линий тока, заметно усилится до того как ячейки превратятся в валы, то трехмерный ячеечный характер

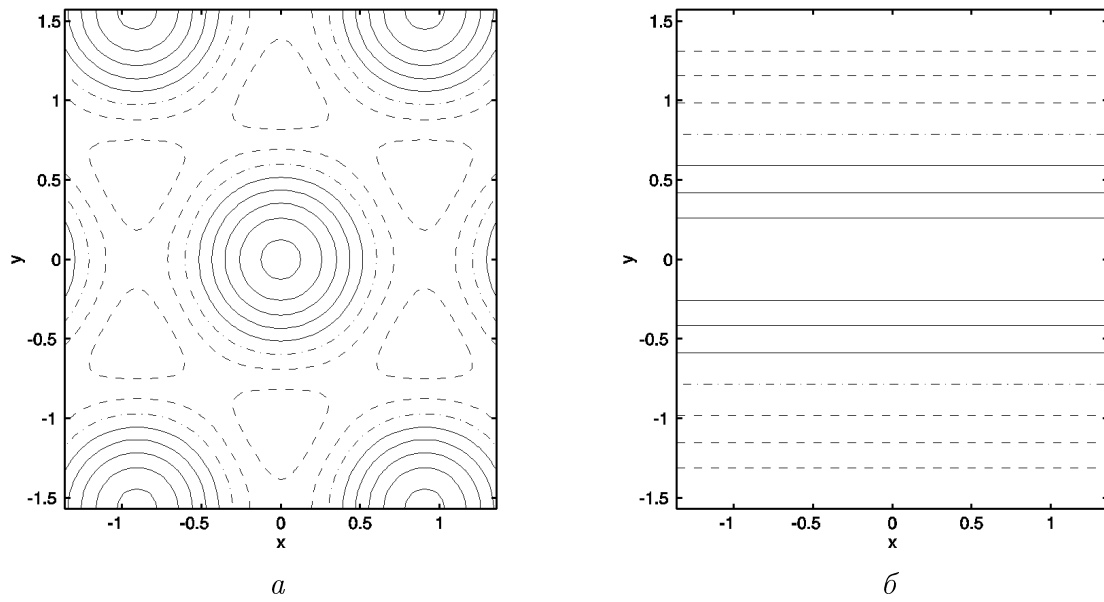


Рис. 5. Переход ячеечного течения в валиковое (расчет для $R = 3000$, $Q = 0,01$, $P_1 = 1$, $P_2 = 10$). Показаны изолинии вертикальной компоненты скорости в средней плоскости $z = 1/2$ слоя (сплошные линии соответствуют положительным значениям, штриховые — отрицательным, штрих-пунктирная — нулевому): *а* — течение, заданное в начальный момент $t = 0$ (шаг изолиний $0,0716$), *б* — течение в момент $t = 12$ (шаг изолиний $6,54$)

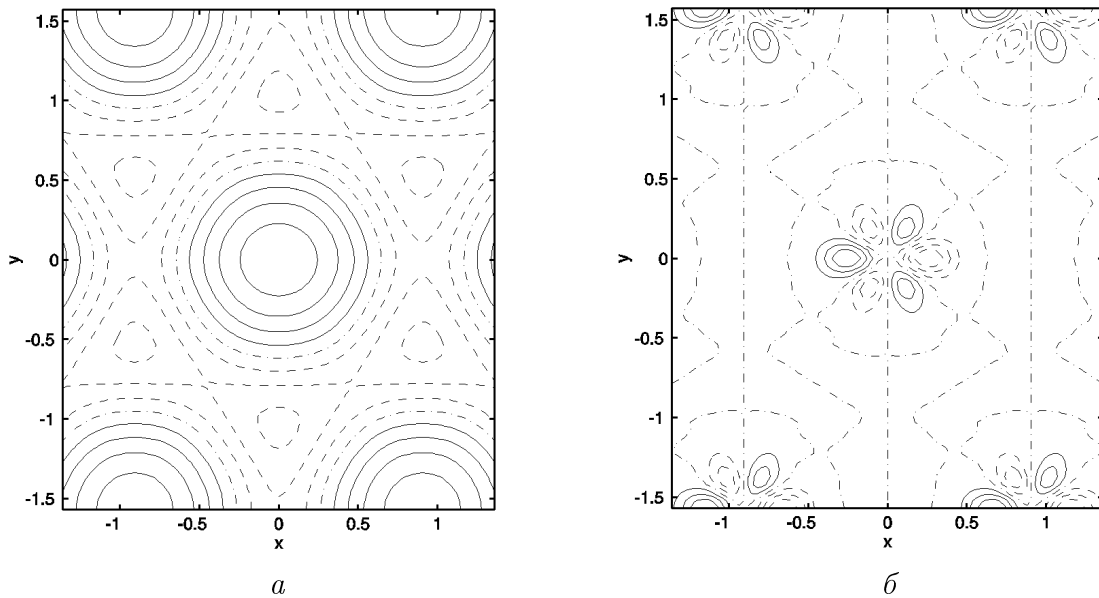


Рис. 6. Течение и магнитное поле, полученные для момента $t = 8$ в том же расчете, что и на рис. 5. Показаны изолинии вертикальной компоненты скорости (*а*; шаг изолиний $5,69$) и вертикальной компоненты возмущения магнитного поля (*б*; шаг изолиний $34,2$) в средней плоскости $z = 1/2$ слоя. Обозначения те же, что и на рис. 5

течения может сохраниться, и при подходящем сочетании параметров окажется возможным значительное дальнейшее усиление указанной компоненты. Консервация (стабилизация) течения не обязательно должна быть полной — вообще говоря, достаточно «затягивания» режима трехмерного течения на более или менее длительное время.

На рис. 5, 6 показан пример эволюции изначально трехмерного ячеечного течения (причем рис. 5 представляет начальный и конечный этапы эволюции, а рис. 6 — некоторый промежуточный этап). Течение создает характерную конфигурацию усиленного магнитного поля, а затем переходит в двумерное валиковое (в результате чего магнитное поле затухает). В момент $t = 0$ задается небольшое по амплитуде поле скоростей, образующее шестиугольные ячейки (рис. 5, *a*) и слабое исходное магнитное поле. Вначале течение усиливается и к $t \sim 0,5$ почти достигает установления (его структура при $t = 8$ показана на рис. 6, *a*). Происходит усиление магнитного поля, и процесс этот в общих чертах согласуется с кинематической моделью. В результате к моменту $t = 8$ формируется сложная магнитная конфигурация, в которой выделяются две области сильных полей противоположных полярностей с максимальными значениями вертикальной компоненты, более чем в 130 раз превышающими напряженность начального поля (рис. 6, *b*). Имеются также более слабые максимумы, из-за чего в целом конфигурация не является чисто биполярной. Легко представить себе, что варьирование начальных условий должно влиять на количество и расположение таких второстепенных максимумов, поэтому данный механизм способен создавать самые разнообразные конфигурации типа реально наблюдаемых в солнечных пятнах. Вскоре после момента $t = 8$ начинается быстрый переход к двумерному валиковому течению, которое затем стремится к установившемуся режиму (рис. 5, *b*); при этом магнитное поле возвращается в исходное состояние.

Этот пример довольно характерен для исследованных сочетаний параметров и позволяет сделать некоторые выводы, интересные для физики Солнца.

Выводы и обсуждение

Хотя до детального исследования разнообразных возможных режимов еще далеко, уже сейчас можно утверждать, что численное моделирование подтверждает эффективность обсуждаемого механизма. Рассмотренный пример соответствует условиям не самым благоприятным для достижения больших напряженностей поля в ячейке, тем не менее он продемонстрировал правильность основных выводов, полученных при исследовании кинематической модели.

На материале выполненных расчетов эффект консервации пока виден только в том, что при больших Q переход к валам происходит быстрее, а магнитное поле усиливается до меньших значений. Но пространство параметров на данный момент обследовано еще явно недостаточно, и практически нет сомнений в том, что должны существовать режимы с более длительной консервацией (и даже, возможно, с достижением стационарного состояния течения и магнитного поля). В таких режимах должны формироваться и более сильные поля. Поиск режимов консервации трехмерного ячеечного течения является, очевидно, ключевым моментом исследования.

Другим важным неисследованным вопросом является возможность локального действия данного механизма в условиях, когда затравочное поле пронизывает не слой как целое, а отдельную ячейку или группу ячеек (именно этот случай наиболее интересен для физики Солнца). В этом случае течение может оказаться не столь устойчивым, как пространственно-периодическая система ячеек, взаимодействующих с магнитным полем (обсуждение стабилизирующего влияния пространственной периодичности на конвективные течения в обычной гидродинамике см. в книге Гетлинга, 1999).

Вообще соответствующий выбор начальных условий может обеспечить генерацию самых разнообразных конфигураций магнитного поля, которые будут при этом сохранять черты, характерные для полей солнечных пятен, включая связь с крупномасштабным затравочным полем. В частности, если допустить вертикальную ориентацию начального магнитного поля, то получится конфигурация униполярного типа, а наклонные начальные поля должны порождать всевозможные суперпозиции полей униполярных, биполярных и более высокой мультиполярности.

На первый взгляд — по крайней мере, если судить по рис. 6, б — данная модель не обеспечивает квантованности площадей пятен в том виде, в каком ее описал Бумба (1967). Но следует иметь в виду, что рассмотренный пример демонстрирует лишь «элементарный акт» обсуждаемого процесса. В реальных солнечных условиях формирование локальных магнитных полей конвекцией должно носить «коллективный» характер — в нем должны участвовать несколько супергранул, а тогда связь между их числом и полной площадью, занятой усиленным полем, должна проявиться вполне отчетливо.

Подведем итог сказанному. Идея коренной роли конвективных течений в формировании магнитных полей пятен, высказанная Б. А. Тверским более 30 лет назад, в плане ее дальнейшего развития выглядит особенно многообещающей именно сейчас, в эпоху мощных вычислительных средств. Поле для ее разработки кажется чрезвычайно обширным. Продвижение исследований в этом направлении может привести к пересмотру некоторых положений физики Солнца и преодолеть ряд серьезных трудностей, с которыми она сталкивается в настоящее время.

Литература

- Бумба (Bumba V.). Observations of solar magnetic and velocity fields. In *Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica «E. Fermi»*, 39 Corso, pp. 77–123, 1967.
- Гетлинг А. В. Магнитные поля конвективных ячеек зоны супергрануляции. *Астрон. ж.*, **45**(6), 1222–1228, 1968.
- Гетлинг А. В., Тверской Б. А. Возможный механизм формирования магнитных полей солнечных пятен. *Астрон. ж.*, **45**(3), 606–609, 1968.
- Гетлинг А. В. *Гидромагнитные свойства конвективных вихрей*. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, М.: НИИЯФ МГУ, 1969.

- Гетлинг А. В., Тверской Б. А. Модель колебательного гидромагнитного динамо: I, II. *Геомагн. и аэрон.*, **11**(2), 211–218, **11**(3), 389–395, 1971.
- Гетлинг А. В. *Конвекция Рэлея – Бенара. Структуры и динамика*. М.: УРСС, 1999.
- Кулей, Тьюки (Cooley J. W., Tukey J. W.). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, **19**(90), 297–301, 1965.
- Орсаг (Orszag S. A.). Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: I. Galerkin (spectral) representations. *Stud. Appl. Math.*, **50**(4), 293–327, 1971.
- Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy. *J. Fluid Mech.*, **49**(1), 75–112, 1971.
- Паркер (Parker E. N.). The formation of sunspots from the solar toroidal field. *Astrophys. J.*, **121**, 491, 1955.
- Тверской Б. А. К теории гидродинамического самовозбуждения регулярных магнитных полей. *Геомагн. и аэрон.*, **6**(1), 11–18, 1966.