

532.529

**ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР  
КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ—БЕНАРА**

*А.В. Гетлинг*

(Научно-исследовательский институт ядерной физики  
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	1
2. Исходные понятия	3
3. Аппарат исследований	8
3.1. Эксперимент. 3.2. Теоретические подходы.	
4. Основные типы структур конвективных течений	23
4.1. Двумерные валы и трехмерные ячейки. 4.2. Квазидвумерные валиковые структуры.	
4.3. Конвективные текстуры.	
5. Смена режимов конвекции	37
6. Отбор волновых чисел конвективных валов	43
6.1. Волновые числа в экспериментах со случайными начальными возмущениями.	
6.2. Поиски универсальных критериев отбора. 6.3. Устойчивость двумерных Шишковых течений. 6.4. Функционал Ляпунова и отбор. 6.5. Отбор в системе прямых параллельных валов. 6.6. Волновые числа осесимметричных течений. 6.7. Движение и равновесие дислокаций.	
7. Заключение	75
Примечания	76
Список литературы	77

**1. Введение**

Конвекция, связанная с неоднородным нагревом, является без преувеличения самым распространенным видом течений газа и жидкости во Вселенной. Немалую роль она играет и в разнообразных технических устройствах. Все это уже вполне объясняет стойкий и пристальный интерес исследователей к конвекции. Но в последнее время этот интерес мощно стимулируется и другим

обстоятельством: задачи о конвекции дают богатый материал для разработки новых идей, касающихся соотношения порядка и хаоса в гидродинамике, простоты и сложности в структуре и поведении гидродинамических объектов.

Едва ли не чаще всего предметом изучения оказывается конвекция в плоском горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, — *конвекция Рэлея—Бенара*<sup>(1\*)</sup>. Она содержит в себе существенные черты, характерные для многих явлений гидродинамической неустойчивости. В то же время при этой конвекции из-за отсутствия интенсивного среднего потока пространственные и временные эффекты в значительной степени расцеплены, а это создает большие удобства как для экспериментального, так и для теоретического изучения. Конвекция Рэлея—Бенара дает богатые возможности для исследования процессов самопроизвольного возникновения упорядоченных пространственных структур и при этом ставит весьма тонкие вопросы реализуемости форм и масштабов течений — отбора тех из них, которые оказываются в каком-то смысле оптимальными.

Устойчивость того или иного стационарного течения, допускаемого уравнениями, имеет прямое отношение к его реализуемости. Более того, она часто рассматривается как основной критерий реализуемости: "Осуществляющиеся в природе течения должны не только удовлетворять гидродинамическим уравнениям, но должны еще быть устойчивыми: малые возмущения, раз возникнув, должны затухать со временем" [1]. Однако это необходимое условие не является достаточным. Класс устойчивых стационарных решений уравнений гидродинамики, вообще говоря, гораздо шире, чем класс течений, спонтанно возникающих в соответствующих условиях. По мере накопления материала исследований становится все яснее, что на тезис "Реализуется то, что устойчиво" можно возразить: "Не всегда и не все то, что устойчиво, реализуется". Для выхода на некоторое устойчивое состояние могут потребоваться весьма специальные начальные условия, а может таковых и не найтись вообще. Конвекция Рэлея—Бенара является прекрасной иллюстрацией к сказанному.

Заметим, что в теории конвекции проблема реализуемости устойчивых течений является ключевой по отношению ко многим другим, в частности — выдвигаемым практикой. Усредненные характеристики конвекции, которые так часто бывают нужны (в первую очередь — тепловой поток, переносимый конвектирующей жидкостью), в принципе оказываются выводимыми из уравнений, как только находятся форма и масштаб течения и, следовательно, становится возможным расчет амплитуды скорости.

Данный обзор посвящен вопросам формирования пространственных структур при конвекции Рэлея—Бенара, проблеме отбора их форм и масштабов, смене режимов конвекции. За последнее десятилетие наблюдается лавинообразный рост числа публикаций, относящихся к конвекции, причем многие авторы явно или неявно касаются проблемы формирования структур. Обилие материала заставило ограничиться обсуждением (или упоминанием) в обзоре только тех работ, которые имеют прямое отношение к означенной теме. Автор вынужден почти совсем не затрагивать вопросы влияния осложняющих факторов, которые придают течению качественно новые черты по сравнению с классическим случаем конвекции Рэлея—Бенара. В результате за рамками обзора оказались, например, интереснейшие эффекты, связанные с большими вариациями параметров по высоте, и, следовательно, многие ситуации с условленной вертикальной структурой течения. Не обсуждаются также режимы с такими большими температурными градиентами, когда в конвектирующей жидкости имеет место развитая турбулентность.

Основное внимание уделяется физической картине явлений, используется лишь необходимый минимум математического аппарата.

Из опубликованных обзоров, пожалуй, ближе всего к данной работе по тематической направленности стоит [2]. В тексте встретятся ссылки и на другие обзоры.

Статья построена следующим образом. После введения основных понятий и обозначений (гл. 2) дается описание различных подходов к экспериментальному и теоретическому изучению проблемы (гл. 3). Затем, после систематизации основных типов структур и режимов конвекции (гл. 4 и 5), рассматриваются различные характерные сценарии эволюции и типы геометрии течений, о которых часто говорят как о "механизмах отбора" масштабов (гл. 6). В каждом случае проводится сопоставление результатов, полученных разными методами, описанными в гл. 3, в частности, параллельно излагаются данные эксперимента и теории. Гл. 7 суммирует и обобщает материал.

Стремясь по возможности унифицировать обозначения, автор в ряде случаев изменил их по сравнению с оригинальными работами — такие изменения оговариваются лишь там, где возможны недоразумения.

## 2. Исходные понятия

Все результаты, касающиеся конвекции Рэлея—Бенара, удобно так или иначе привязывать к "классической" постановке линейной задачи, впервые сформулированной Рэлеем [3], а затем в более общем виде Пеллю и Саусвеллом [4] и детально обсужденной Чандрасекаром в монографии [5]. Полезно, вспомнив эту задачу, ввести понятия и обозначения, которые понадобятся в дальнейшем.

Задача включает в себя систему гидродинамических уравнений в приближении Буссинеска (или Обербека—Буссинеска). Первоначальное (узкое) значение этого термина таково [5]. Плотность вещества  $\rho$  считается функцией одной лишь температуры  $T$  (т.е. предполагается несжимаемость):

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \alpha (T - T_0), \quad (2.1)$$

где  $\rho_0$  — значение плотности при некоторой подходящим образом выбранной "средней" (или, лучше сказать, отсчетной) температуре  $T_0$ . Тогда при малом коэффициенте объемного теплового расширения  $\alpha$  и малой вариации (в пределах рассматриваемой области) материальных параметров среды (кинематической вязкости  $\nu$ , температуропроводности  $\chi$  и того же коэффициента  $\alpha$ ) для не слишком быстрых процессов плотность и эти параметры можно считать постоянными во всех членах уравнений, кроме одного: вариация плотности сохраняется там, где она множится на ускорение силы тяжести  $g$  (этот член представляет собой архимедову силу, которая собственно и порождает конвекцию). При этом оказывается пренебрежимым и тепловыделение из-за вязкой диссипации.

Баротропное распределение температуры (такое, что  $[\nabla T, \mathbf{g}] = 0$ , если скорость  $\mathbf{v} = 0$ ) при условии стационарности должно быть линейным по вертикальной координате  $z$ :  $T = T_1 - \beta z$  (в дальнейшем будем называть его невозмущенным распределением, а  $\beta$  — невозмущенным градиентом температуры). При произвольном  $T$  назовем возмущением температуры величину  $\theta = T - T_1 + \beta z$ , а возмущением  $p'$  давления  $p$  — его отклонение от распределения, соответствующего такому линейному температурному профилю. В

этих обозначениях уравнения Буссинеска имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \mathbf{g}\alpha\theta + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.4)$$

Наиболее строгое обоснование приближения Буссинеска при весьма широких предположениях дали Перес Кордон и Веларде [6], они же обобщили его [7] на случай, когда проявляют себя эффекты сжимаемости (в толстом слое) и вязкой диссипации. Обсуждение условий применимости приближения Буссинеска имеется в книге [8].

Везде в дальнейшем, кроме специально оговоренных случаев, будем иметь в виду ситуации, когда приближение Буссинеска справедливо.

Рассмотрим плоский горизонтальный слой жидкости  $0 \leq z \leq h$  (ось  $z$  декартовой системы координат  $x, y, z$  направлена вверх, так что  $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$ ) и будем считать, что температуры его недеформируемых верхней и нижней поверхностей фиксированы (т.е. что теплопроводность границ слоя бесконечна):

$$\begin{aligned} T &= T_1 && \text{при } z = 0, \\ T &= T_2 = T_1 - \Delta T && \text{при } z = h, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\Delta T = \beta h$ . Это определяет условие

$$\theta = 0 \quad (2.6)$$

на обеих этих границах. Ограничимся случаем  $\beta > 0$ . Каждую из поверхностей слоя будем считать либо жесткой, либо свободной, вводя на этой границе соответственно либо условие прилипания жидкости

$$\mathbf{v} = 0, \quad (2.7)$$

либо условие обращения в нуль вертикальной компоненты скорости и тангенциальных напряжений:

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

(для нижней границы последние два условия (2.8), как правило, весьма искусственны, но процедура решения уравнений сильно упрощается выбором таких условий; известные случаи, когда допущение свободных границ сильно влияет на свойства решений, будут в дальнейшем отмечены).

В литературе встречается несколько способов перехода в данной задаче к безразмерным переменным. В дальнейшем будем пользоваться следующим, наиболее употребительным. В качестве единицы длины выберем толщину слоя  $h$ , единицы времени — время вертикальной диффузии тепла  $\tau_v = h^2/\chi$ , единицы температуры — разность температур  $\Delta T$  между поверхностями слоя. Тогда система (2.2) — (2.4) запишется в следующем безразмерном виде:

$$\frac{1}{P} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \right] = -\nabla\pi + \hat{\mathbf{z}}R\theta + \Delta\mathbf{v}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v_z + \mathbf{v} \nabla \theta = \Delta \theta, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (2.11)$$

здесь

$$R = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi} \quad (2.12)$$

— основные параметры, характеризующие режим конвекции, называемые соответственно числами Рэля и Прандтля,  $\pi$  — безразмерная форма величины  $\rho' / \rho_0$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ . Постановку задачи (2.9) — (2.11), (2.6) — (2.8) будем в дальнейшем рассматривать как *стандартную*.

Считая  $\mathbf{v}$  и  $\theta$  бесконечно малыми, линеаризуем (2.9) и (2.10) по этим переменным, а затем подействуем на (2.9) оператором  $\hat{\mathbf{z}} \operatorname{rot} \operatorname{rot}$  и воспользуемся (2.11). Система сведется к двум уравнениям, определяющим  $v_z$  и  $\theta$ . Исключим  $\theta$ , зафиксируем горизонтальный волновой вектор  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, 0\}$  и будем искать  $v_z$  в виде нормальных мод  $\exp(\lambda t) w(z) f(\mathbf{x})$ , где  $\lambda$  — инкремент,  $\mathbf{x} = \{x, y, 0\}$ , а  $f(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$  или вообще некоторое пространственно-периодическое решение двумерного уравнения Гельмгольца  $\Delta f + k^2 f = 0$ , т.е. линейная комбинация

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{x}), \quad (2.13)$$

где векторы  $\mathbf{k}_j$  отличаются только ориентацией:  $|\mathbf{k}_j| = k$ . Для  $w$  получим

$$(D^2 - k^2 - \lambda)(D^2 - k^2 - \frac{1}{P}\lambda)(D^2 - k^2)w = -Rk^2 w, \quad (2.14)$$

где  $D = d/dz$ .

Граничные условия (2.6) — (2.8) с учетом (2.11) дают

$$v_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \text{ на жесткой границе,} \quad (2.15)$$

$$v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0, \quad \theta = 0 \text{ на свободной границе.} \quad (2.16)$$

Преобразованные уравнения (2.9), (2.10) для нормальных мод позволяют свести (2.15), (2.16) к набору условий для одной переменной  $v_z$  (или для  $w$ ):

$$w = Dw = (D^2 - 2k^2 - \frac{1}{P}\lambda)D^2 w = 0 \text{ на жесткой границе,} \quad (2.17)$$

$$w = D^2 w = D^4 w = 0 \text{ на свободной границе.} \quad (2.18)$$

Таким образом, (2.14) вместе с условиями (2.17) или(и) (2.18) образуют задачу на собственные значения инкремента  $\lambda$  и собственные функции  $w(z)$ .

В случае двух свободных границ эта задача решается просто и приводит к явному выражению для собственных значений  $\lambda_n$ , соответствующих собственным функциям  $w_n = \sin n\pi z$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Из этого выражения непосред-

ственно видно, что при всяком  $R > 0$  оба имеющих значения  $\lambda_n(R, P, k)$  действительны, причем одно из них всегда отрицательно, а другое — положительно при

$$R > R_n(k) \equiv \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2} \quad (2.19)$$

и отрицательно при  $R < R_n(k)$  (далее под  $\lambda_n$  будем понимать именно это второе значение). Каждая функция  $R_n(k)$  имеет минимум. Линия  $R = R_1(k)$  на плоскости  $(k, R)$  разграничивает области затухания всевозможных бесконечно малых возмущений и нарастания возмущений низшей моды  $n = 1$  (рис. 1). Очевидно, при

$$R < R_c \equiv \min R_1(k) = R_1(k_c) = \frac{27}{4}\pi^4 = 657,511, \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2,221 \quad (2.20)$$

состояние покоя жидкости в слое устойчиво относительно бесконечно малых возмущений. Величины  $R_c$  и  $k_c$  называются соответственно *критическим числом Рэлея* и *критическим волновым числом*. В критическом (нейтральном) режиме  $R = R_c$  возможно стационарное движение бесконечно малой амплитуды с единственным волновым числом  $k = k_c$ . При  $R > R_c$  (надкритический режим) слой конвективно неустойчив, и могут нарастать возмущения со всеми волновыми числами, лежащими между двумя корнями уравнения  $R = R_1(k)$ , иначе говоря, между абсциссами точек пересечения прямой  $R = \text{const}$  с двумя ветвями *нейтральной кривой*  $R = R_1(k)$ . Это обстоятельство и порождает проблему отбора волновых чисел в надкритических режимах, обсуждаемую в гл. 6.

В случаях, когда обе поверхности слоя являются жесткими и когда одна — жесткая, а другая — свободная, задача требует более громоздких выкладок, но качественно приводит к тем же результатам (при другом виде собственных функций). Отметим, что для двух жестких границ

$$R_c = 1707,762, \quad k_c = 3,117. \quad (2.21)$$

Вблизи  $R = R_c$ ,  $k = k_c$  инкремент  $\lambda_1(R, P, k)$  может быть представлен разложением

$$\lambda_1 = \tau_0^{-1} [\varepsilon - \xi_0^2(k - k_c)^2], \quad (2.22)$$

где

$$\varepsilon = \frac{R - R_c}{R_c} \quad (2.23)$$

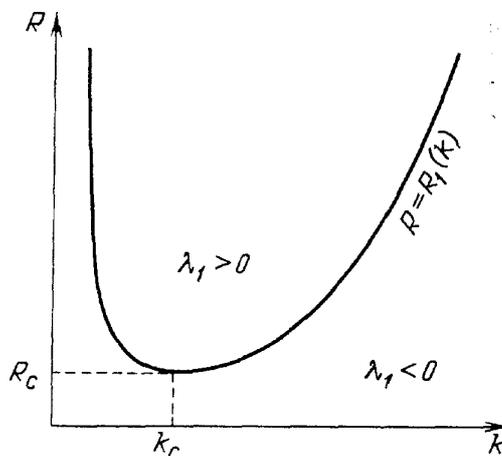


Рис. 1. Нейтральная кривая устойчивости слоя неподвижной жидкости. Выше кривой — область неустойчивых состояний, ниже — устойчивых

— *относительная надкритичность*, а характерные масштабы времени и длины

$$\tau_0 = \left( R_c \frac{\partial \lambda_1}{\partial R} \right)_{R_c, k_c}^{-1}, \quad \xi_0 = \left( \frac{1}{2R_c} \frac{d^2 R_1}{dk^2} \right)_{k_c}^{1/2} \quad (2.24)$$

называются соответственно *временем релаксации* и *длиной когерентности*. В некоторых (специально оговариваемых) случаях будем обозначать через  $\varepsilon$  несколько иные, но близкие по физическому смыслу величины. Масштабы  $\tau_0$  и  $\xi_0$ , вычисленные в ряде работ, в частности [9, 10], равны

$$\tau_0 = \frac{1 + 1,954P}{38,44P}, \quad \xi_0 = 0,3847 \quad \text{для двух жестких границ,} \quad (2.25)$$

$$\tau_0 = \frac{2(1 + P)}{3\pi^2 P}, \quad \xi_0 = \left( \frac{8}{3\pi^2} \right)^{1/2} \quad \text{для двух свободных границ.} \quad (2.26)$$

Важной чертой нормальных мод линейной задачи является вырождение собственных значений по разнообразным функциям  $f(x)$  — инкременты  $\lambda_n$  зависят лишь от волнового числа  $k = |k_j|$ . Различным  $f(x)$  соответствуют решения в виде различных систем *конвективных ячеек* — элементов пространственно-периодической структуры течения, обладающих тем свойством, что на их вертикальных границах равна нулю нормальная компонента скорости<sup>(2\*)</sup>. Конфигурацию ячейки в плоскости  $(x, y)$  называют *планформой*. В линейной задаче, таким образом, имеется вырождение по планформам. Вопрос о том, какие планформы должны реально наблюдаться, составляет, наряду с вопросом об отборе волновых чисел, часть общей проблемы реализуемости конвективных течений.

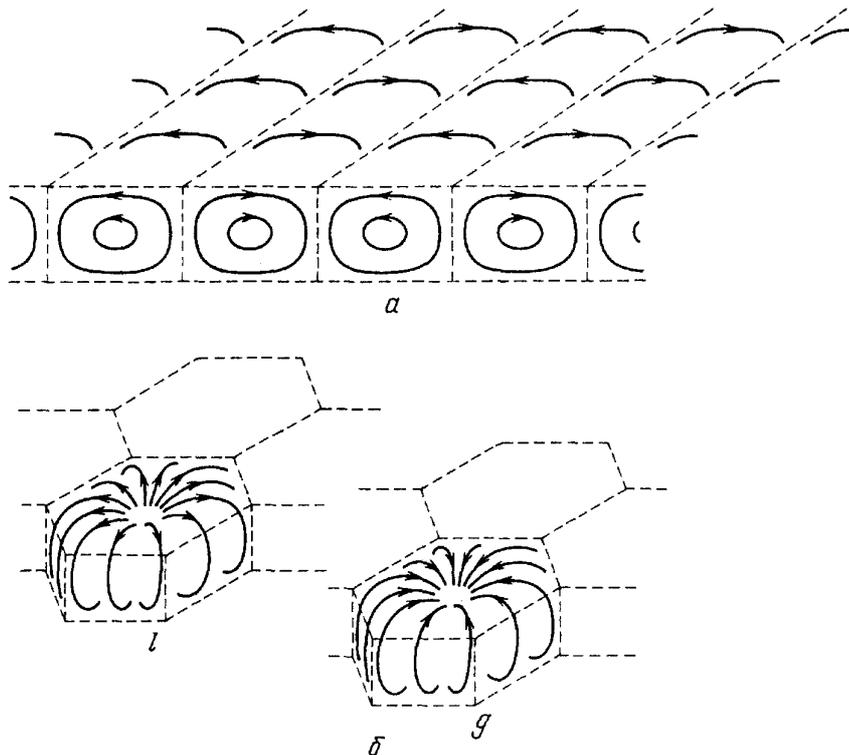


Рис. 2. Схематическое изображение конвективных ячеек. а — Двумерные валы. б — Шестиугольные ячейки l- и g-типов

Среди ячеек, наблюдаемых в эксперименте при различных условиях, наиболее характерны три типа, которые в первом приближении описываются следующими тремя функциями планформы.

1. *Двумерные валы* (рис. 2,а) имеют "прототип", даваемый функцией

$$f(x) = \cos kx. \quad (2.27)$$

Поскольку волновой вектор  $\mathbf{k}$  ориентирован в направлении  $x$ , такие валы (параллельные оси  $y$ ) называют *x-валами*. Ячейкой в данном случае имеет смысл называть пару соседних валов, занимающую целый пространственный период. Жидкость в двух таких валах циркулирует в плоскости  $(x, z)$  в противоположных направлениях.

2. *Шестиугольные ячейки* (рис. 2,б) описываются функцией

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} kx\right) \cos\left(\frac{1}{2} ky\right) + \cos ky = \\ &= \cos\left[\frac{k}{2}(y + \sqrt{3} x)\right] + \cos\left[\frac{k}{2}(y - \sqrt{3} x)\right] + \cos ky \end{aligned} \quad (2.28)$$

и представляют собой суперпозицию трех систем валов с волновыми векторами, имеющими модуль  $k$  и ориентированными под углом  $2\pi/3$  друг к другу.

3. *Квадратные ячейки* представимы функцией

$$f(x) = \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}} x\right) \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}} y\right) = \frac{1}{2}(\cos kx' + \cos ky') \quad (2.29)$$

(где система координат  $x', y'$  повернута на угол  $\pi/4$  относительно  $x, y$ ; пример ячейки — область  $-\pi/k < x' < \pi/k, -\pi/k < y' < \pi/k$ ).

Все сказанное в этой главе относится к идеализированному случаю бесконечного слоя. Далее мы увидим, что наличие боковых стенок, ограничивающих конечную область слоя, может сильно повлиять на развитие конвекции в этой области. При этом существенным параметром становится *аспектное отношение*

$$\Gamma = \frac{L}{h}, \quad (2.30)$$

где  $L$  — характерный горизонтальный размер области (для круглых резервуаров  $L$  традиционно полагают равным радиусу)<sup>(3\*)</sup>. К обсуждению роли этой величины мы еще неоднократно вернемся. В первую очередь будем интересоваться случаями больших  $\Gamma$ .

Размер  $L$  определяет собой характерное время горизонтальной диффузии тепла  $\tau_h = L^2/\chi = \Gamma^2\tau_v$ , с которым могут быть связаны времена крупномасштабных процессов.

### 3. Аппарат исследований

**3.1. Эксперимент.** Не вдаваясь в технические детали, опишем здесь самые существенные и общие черты постановки экспериментов по изучению конвекции в горизонтальном слое.

Типичная схема установки приведена на рис. 3. Слой рабочей жидкости ограничивается сверху и снизу пластинами теплообменников, поддерживающих заданные температуры границ слоя. Это достижимо тем точнее, чем больше теплопроводность пластин. Поэтому в тех случаях, когда не требуется

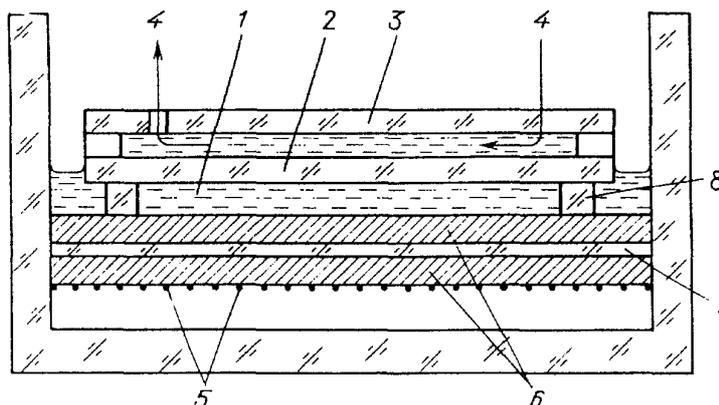


Рис. 3. Типичная схема экспериментальной установки [11]. 1 — рабочая жидкость, 2, 3 — стеклянная и плексигласовая пластины верхнего теплообменника, 4 — термостатированная вода, 5 — нагреватель, 6 — медные пластины нижнего теплообменника, 7 — стеклянная пластина (для понижения чувствительности температуры нижней поверхности конвективного слоя к колебаниям нагрева), 8 — калиброванная вставка, задающая толщину слоя (четыре таких вставки располагаются в углах рабочей области)

прозрачность (чаще для нижнего теплообменника), используют, как правило, массивную медную или алюминиевую пластину. Одна ее поверхность находится в контакте с рабочей жидкостью. С противоположной стороны пластину нагревают проволочным или пленочным электронагревателем, регулируя нагрев электронным автоматом, либо устраивают в толще теплообменника горизонтальную плоскопараллельную полость, через которую прокачивают термостатированную воду. Если же теплообменник должен быть прозрачным, то обычно его делают из пластины зеркального стекла (которая соприкасается с рабочей жидкостью) и располагаемой параллельно ей другой прозрачной пластины; промежуток между ними служит каналом для термостатированной воды. Если стремиться по возможности точно воспроизвести идеальные тепловые граничные условия (2.6), то теплопроводность стекла может оказаться недостаточной. Поэтому иногда вместо стеклянной применяют пластину из монокристалла сапфира, но в таком случае приходится ограничиваться небольшими (в несколько см) горизонтальными размерами слоя: более крупные сапфировые пластины изготовить не удастся.

Верхний теплообменник часто бывает съемным и меньших горизонтальных размеров, чем нижний, так что оказывается окруженным по периметру зазором, в котором рабочая жидкость имеет свободную поверхность и толщина ее слоя не контролируется. В этом зазоре из-за сложного распределения температуры и термокапиллярного эффекта (см. раздел 4.1) развиваются неупорядоченные трехмерные конвективные течения. С целью исключить их влияние на конвекцию в рабочей области (под верхним теплообменником) многие экспериментаторы ограничивают эту область дополнительными боковыми стенками, вкладывая специальную рамку. Другие [12, 11] намеренно этого не делают, поскольку, по их наблюдениям, благодаря зазору на структуру течения в рабочей области меньше влияют боковые стенки.

Иногда геометрия экспериментальной установки бывает качественно иной: полость с рабочей жидкостью имеет вид узкого длинного канала, ширина которого сравнима с высотой или меньше ее (см., например, [13]). При подогреве снизу в полости формируются короткие отрезки конвективных валов, "упирающиеся" своими торцами в длинные стенки канала (об этом эффекте будет сказано в разделе 4.2). В результате исключаются эффекты, связанные

с трехмерными деформациями валов, и изучать динамику волновых чисел такого простого валикового течения особенно удобно. Но, конечно, результаты таких опытов могут соответствовать случаю горизонтального слоя лишь качественно, а не количественно.

Выбор рабочих жидкостей охватывает широкий диапазон чисел Прандтля: используются, в частности, разнообразные силиконовые масла ( $P \sim 10 - 10^4$ ), глицерин ( $\sim 10^3$ ), этиловый спирт (14 — 17), метанол (7), вода (от 7 при комнатной температуре до 2,5 при 70°C), жидкий гелий (0,5 — 4,5)<sup>(4\*)</sup>. Проводятся также эксперименты с воздухом (0,71).

Наиболее распространенный сейчас метод визуализации конвективных течений — теневой, основанный на температурной зависимости коэффициента преломления света. Холодные нисходящие потоки фокусируют свет и в проекции на экран выглядят светлыми, а теплые восходящие действуют рассеивающе и выглядят темными. Применяется и визуализация специальными добавками. Для исследования структуры течений используются также лазерная доплеровская анемометрия (например, в [14]), оптическая интерферометрия [15] и другие методы.

Особая серия экспериментальных работ специально ориентирована на изучение устойчивости течений того или иного заданного вида. Это эксперименты с контролируруемыми начальными условиями. По-видимому, первой в этом цикле была работа Чена и Вайтхеда [16], и предложенная ими схема эксперимента с несущественными изменениями использовалась в ряде позднейших исследований. Методика эта такова. Слой рабочей жидкости, находящийся в подкритическом режиме, освещается сквозь прозрачный верхний теплообменник светом мощной лампы, прошедшим через периодическую решетку из полос непрозрачного материала с прозрачными промежутками между ними. Благодаря этому формируется валиковое конвективное течение с длиной волны, навязанной извне и равной периоду решетки. Постепенно разность температур нижней и верхней границ слоя увеличивается до нужного надкритического значения, после чего лампа выключается и начинается самопроизвольная эволюция течения. В некоторых работах таким способом исследовалось поведение течений не однородной валиковой, а более сложной структуры: например, в [17] — так называемого двухмодового течения (раздел 6.2), в [18] — системы валов с дислокацией (разделы 4.3, 6.7), а в [19] — шестиугольных и квадратных ячеек. Для создания таких начальных полей скорости использовались решетки соответствующей формы.

### 3.2. Теоретические подходы.

**3.2.1. Разложения по малой амплитуде (надкритичности).** Исследование надкритических режимов требует решения нелинейных уравнений. Начиная с работ Горькова [20] и Малкуса и Верониса [21], в теории конвекции Рэлея—Бенара широко используется метод возмущений, основанный на разложении уравнений Буссинеска по малому параметру, характеризующему амплитуду конвективного движения и степень надкритичности. Обычно рассматриваются разложения вида

$$\mathbf{v} = \varepsilon^{1/2}(\mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon^{1/2}\mathbf{v}^{(1)} + \varepsilon\mathbf{v}^{(2)} + \dots), \quad (3.1)$$

$$R = R_c + \varepsilon^{1/2}R^{(1)} + \varepsilon R^{(2)} + \dots \quad (3.2)$$

и аналогично для  $\theta$  и  $p'$  (в оригинале [21] и ряде других работ величина  $\varepsilon^{1/2}$  обозначена как  $\varepsilon$ ). Этот подход не раз обсуждался в монографиях (на-

пример, Гершуни и Жуховицкого [8]) и обзорах (например, Буссе [22, 23]).

Использование таких разложений нас будет интересовать в первую очередь как средство построения аппарата амплитудных и фазовых уравнений, которые сейчас широко применяются для изучения динамики конвекции и о которых речь пойдет в п. 3.2.2.

В [24] разложение ведется не по  $\epsilon$ , а по параметру  $\eta = [(R - R_c)/R]^{1/2}$ , что позволяет охватить больший диапазон значений  $R$ , поскольку  $\eta < 1$  при любом конечном  $R$ .

Наибольшее распространение получила схема метода возмущений, построенная Шлютером, Лорцем и Буссе [25] и основанная на разложениях (3.1), (3.2). Условия разрешимости неоднородных уравнений, получаемых на последовательных шагах разложения исходной системы, дают последовательные приближения стационарного решения, причем  $\mathbf{v}^{(0)}$  имеет структуру решения линеаризованной задачи; оказывается, что без учета эффектов поверхностного натяжения всегда  $\mathbf{R}^{(1)} = 0$  и что при симметричных граничных условиях на верхней и нижней поверхностях (а в случае двумерных валов — и при отсутствии такой симметрии)  $\mathbf{R}^{(n)} = 0$  для всех нечетных  $n$ .

**3.2.2. Двумерные модели трехмерной конвекции.** Как только возникла задача теоретического изучения более сложных конвективных структур, чем однородные пространственно-периодические, исследователи начали поиск средств их упрощенного описания. Особенно остро стоит этот вопрос, когда требуется описать трехмерные течения: и по сей день самый универсальный подход — численное моделирование — в трехмерном случае оборачивается такими большими затратами машинного времени, которые зачастую исключают возможность сколько-нибудь подробного исследования. Это в первую очередь относится к расчетам для полостей с большими аспектными отношениями, в которых возникают сложные неоднородные структуры — *текстуры* (см. раздел 4.3).

Первейшая цель построения упрощенных моделей — уменьшить число пространственных измерений, исключив из рассмотрения вертикальную зависимость переменных. Такое возможно потому, что эта зависимость часто имеет "типовую" форму, которая мало меняется в большом диапазоне параметров. Описание трехмерных течений функциями двух (горизонтальных) пространственных координат, а двумерных — функциями одной координаты обеспечивает очень большое увеличение эффективности расчетов.

Но есть возможность уменьшить и число зависимых переменных. Когда течение близко к установившемуся и эволюционирует медленно, компоненты скорости и температуру можно считать связанными теми же соотношениями, что и в стационарном режиме.

Упомянутые две идеи явно или неявно лежат в основе всех предложенных описаний динамики конвективных структур посредством одной (возможно, комплексной) функции двух координат.

1) Амплитудные уравнения. Эффективным инструментом исследования структур слабонадкритических течений, стимулировавшим постановку весьма разнообразных задач, оказалось *амплитудное уравнение Ньюэлла—Вайтхеда—Зегеля* (НВЗ).

Ньюэлл и Вайтхед [26], рассматривая режимы с  $(R - R_c)/R_c = \epsilon$  (здесь обозначение малого параметра изменено по сравнению с [26]) при свободных границах слоя, для описания волнового пакета с допустимой при данном  $\epsilon$  шириной  $O(\epsilon^{1/2})$  полосы волновых чисел, воспользовались "модифицирован-

ным нейтральным решением" типа валов

$$v_z = \varepsilon^{1/2}(A(X, Y, T)e^{ik_c x} + \text{к.с.})\sin \pi z + O(\varepsilon), \quad (3.3)$$

где  $|k_c| = k_c$ , а  $A$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, или функция огибающей (для остальных переменных — аналогичные выражения, связанные с (3.3), как в стационарном слабонадкритическом режиме). Здесь  $X, Y$  — медленные пространственные переменные, а  $T$  — медленное время. Таким образом, непрерывный спектр волновых чисел заложен в медленной пространственно-временной модуляции амплитуды, а изменение фазового множителя задается "центральным" волновым числом пакета, равным критическому.

Допустим, течение представляет собой несколько деформированную систему  $x$ -валов с волновым числом  $k_c$ . Тогда, чтобы все присутствующие в пакете волновые векторы  $\mathbf{k} = \{k_c + \alpha_x, \alpha_y\}$  удовлетворяли требованию  $|\mathbf{k}| = k_c + O(\varepsilon^{1/2})$ , следует положить  $\alpha_x = O(\varepsilon^{1/2})$ ,  $\alpha_y = O(\varepsilon^{1/4})$ . С учетом этого естественно выбрать в качестве медленных переменных

$$X = \varepsilon^{1/2}x, \quad Y = \varepsilon^{1/4}y, \quad T = \varepsilon t. \quad (3.4)$$

Подстановка (3.3) в исходные уравнения приводит в низшем нетривиальном порядке к условию разрешимости краевой задачи — амплитудному уравнению НВЗ, которое после дополнительного изменения масштабов переменных на множители  $O(1)$  принимает вид

$$\partial_T A = A + (\partial_X - i\partial_Y^2)^2 A - |A|^2 A; \quad (3.5)$$

здесь  $A = O(1)$ . Для удобства запишем (3.5) еще в исходных физических переменных с заменой  $\varepsilon^{1/2}A \rightarrow A$ :

$$\tau_0 \partial_t A = \varepsilon A + \xi_0^2 \left( \partial_x - \frac{i}{2k_c} \partial_y^2 \right)^2 A - g|A|^2 A, \quad (3.6)$$

где  $\tau_0$  и  $\xi_0$  соответствуют (2.24), (2.26), а  $g = 1/3\pi^2$ , а также в виде

$$\partial_t A = \varepsilon A + (\partial_x - i\partial_y^2)^2 A - |A|^2 A, \quad (3.7)$$

где  $x, y, t, A$  отличаются от соответствующих исходных переменных множителями  $O(1)$ .

В [26] получена, кроме того, система амплитудных уравнений, описывающая взаимодействие нескольких волновых пакетов указанного типа, у которых "центральные" волновые векторы (равные  $k_c$  по модулю) повернуты на некоторые углы по отношению друг к другу.

Иногда рассматриваются амплитудные уравнения более высоких приближений, например в [27] (см. п. 6.4.1).

Вполне аналогичный подход к выводу уравнения (3.5) (также для слоя со свободными границами) был использован Зегелем [28].

Уравнение НВЗ в случае жестких границ слоя имеет тот же вид и отличается лишь значениями  $\tau_0, \xi_0$  и  $g$  [29].

Амплитудное уравнение для осесимметричной системы кольцевых валов при свободных горизонтальных границах слоя получено в работе [30].

Вариант амплитудного уравнения в более широких предположениях

получили Кросс [31], Кузнецов и Спектор [32]. Допускаются как свободные, так и жесткие границы слоя, а во второй работе, кроме того, включены в рассмотрение *термокапиллярный эффект* (температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения) и деформируемость свободных границ. Авторы не пользуются модифицированным (модулированным) нейтральным решением, а оперируют фурье-преобразованием  $A_{\mathbf{k}}$  по  $x$  и  $y$  низшей (по  $z$ ) гармоники каждой физической переменной ( $|\mathbf{k}|$  близок к  $k_c$ ). Уравнение получается путем проектирования исходной системы на низшую собственную функцию линейной задачи с инкрементом (2.22) и имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_0 \partial_t A_{\mathbf{k}} = & [\varepsilon - \xi_0^2 (k - k_c)^2] A_{\mathbf{k}} - \\ & - \int g(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}') A_{\mathbf{k}}^* A_{\mathbf{k}'} A_{\mathbf{k}''} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{k}''') dk' dk'' dk'''; \end{aligned} \quad (3.8)$$

здесь  $\hat{\mathbf{k}}$  и  $\hat{\mathbf{k}}'$  — единичные векторы направлений  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ ;  $g$ , как и  $\tau_0$ ,  $\xi_0$ , зависит от граничных условий. Если имеется конечная деформация свободной поверхности и (или) термокапиллярный эффект, то в правой части (3.8) появляется дополнительный член, с точностью до постоянного множителя равный [32]

$$\int A_{\mathbf{k}}^* A_{\mathbf{k}'} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') dk' dk''. \quad (3.9)$$

Этот член может стабилизировать вблизи  $R = R_c$  шестиугольные ячейки (с жестким режимом возбуждения); см. раздел 4.1.

Сиггия и Циппелиус [33, 34] заметили, что в случае свободных границ слоя уравнения допускают присутствие крупномасштабного (зависящего только от медленных переменных) однородного по  $z$  горизонтального течения  $\mathbf{V}(X, Y, T)$  (среднего дрейфа). С такими течениями связана вертикальная компонента  $\Omega_z$  завихренности  $\vec{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ . Генерация  $\Omega_z$  обусловлена членом  $P^{-1}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  в уравнении Навье—Стокса (2.9). Амплитудное же уравнение НВЗ из нелинейных членов исходной системы учитывает лишь  $(\mathbf{v}\nabla)\theta$ , не может описать появление  $\Omega_z$  и  $\mathbf{V}$  и является поэтому неполным. Лишь в пределе  $P \rightarrow \infty$ , когда влияние конвективного члена  $P^{-1}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  становится несущественным по сравнению с  $(\mathbf{v}\nabla)\theta$ , крупномасштабное течение подавляется и уравнение НВЗ избавляется от своего недостатка [это относится и к уравнению (3.8)].

Введя медленные переменные согласно (3.4) и пренебрегши горизонтальными движениями, обусловленными начальными условиями, а также такими движениями, которые могут быть исключены внесением жестких боковых границ, авторы получили [34] вместо (3.6) в низшем нетривиальном порядке систему

$$[\xi_0^2 (\partial_x - \frac{i}{2k_c} \partial_y^2)^2 + \varepsilon - \tau_0 \partial_t] A = g |A|^2 A + ik_c \tau_0 B_x A, \quad (3.10)$$

$$(\partial_t - P\Delta)\Omega_z = 2\partial_y [A^* (\partial_x - \frac{i}{2k_c} \partial_y^2) A + \text{к.с.}], \quad (3.11)$$

$$\partial_y \Omega_z = -\Delta B_x, \quad (3.12)$$

где  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ . Аналогом (3.5) является система

$$\partial_T A = A + (\partial_X - i\partial_Y^2)^2 A - |A|^2 A - iB_X A, \quad (3.13)$$

$$\gamma \partial_T \Omega_z = (\partial_Y^2 + \delta \partial_X^2) \Omega_z + b \partial_Y [A^* (\partial_X - i\partial_Y^2) A + \text{к.с.}], \quad (3.14)$$

$$\partial_Y \Omega_z = -(\partial_Y^2 + \delta \partial_X^2) B_X, \quad (3.15)$$

где

$$b = 2 \frac{1+P}{P}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3} \varepsilon}{1+P}, \quad \delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2k_c \xi_0}. \quad (3.16)$$

При  $P \rightarrow \infty$ , очевидно,  $\Omega_z \rightarrow 0$  и  $B_X \rightarrow 0$ .

Если слой имеет жесткие границы, то горизонтальная скорость  $\mathbf{V}$  не может быть постоянна по  $z$ , а генерация  $\Omega_z$  должна выявиться в более высоком порядке по  $\varepsilon$ . Авторы работы [34] провели нестрогий, основанный на феноменологической модели вывод амплитудных уравнений для этого случая. Если заменить  $\Omega_z$  и  $B_X$  на усредненные по  $z$  значения  $\bar{\Omega}_z$  и  $\bar{B}_X$  этих величин, то (при соответствующем выборе масштабов) (3.13) и (3.15) остаются неизменными, а (3.14) заменяется на

$$\bar{\Omega}_z = c_1 \sqrt{\varepsilon} b \partial_Y [A^* (\partial_X - i\partial_Y^2) A + \text{к.с.}], \quad (3.17)$$

где  $c_1 = O(1)$  — некоторая постоянная, а  $b$  имеет иную, чем в (3.16), зависимость от  $P$ .

Заметим, что при чисто двумерной геометрии течения обычное уравнение НВЗ (в этом случае одномерное) применимо и при конечных  $P$ , поскольку дрейф не возникает.

В ряде работ [28, 30, 35, 36, 37] рассматриваются различные варианты граничных условий для амплитудной функции, удовлетворяющей уравнению НВЗ. Они получены сшиванием амплитуды, медленно меняющейся в пространстве вдали от боковой стенки, с соответствующей функцией, описывающей пограничный слой и изменяющейся гораздо быстрее.

Так, в [36] рассмотрена прямоугольная полость со свободными горизонтальными поверхностями и жесткими плохо проводящими тепло боковыми стенками. Дается амплитудное описание течения, представляющего собой суперпозицию двух систем валов — параллельных и перпендикулярных какой-либо из боковых стенок. Для частного случая теплоизолирующих стенок и единственной системы валов граничные условия имеют вид

$$A = 0 \text{ на всех стенках,} \quad (3.18)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \nabla A = 0 \text{ на стенках, перпендикулярных валам} \quad (3.19)$$

( $\hat{\mathbf{n}}$  — единичный вектор нормали к стенке). Авторы отмечают, что вывод второго граничного условия, приведенный в [28] (для другого теплового режима границы), содержит ошибку.

Система валов, расположенная под произвольным углом к боковой стенке (не слишком близко к нормали), рассмотрена в [37] при свободных горизонтальных поверхностях слоя и конечной проводимости стенки. Показано, что вблизи стенки, вообще говоря, будет возникать система "сопряженных" валов малой амплитуды, расположенных симметрично к основным валам относительно нормали к стенке. Граничные условия для амплитуды основной системы имеют вид

$$A = 0, \quad \hat{n} \nabla A = O(\varepsilon^{1/2}), \quad (3.20)$$

где  $A = O(1)$  согласно (3.3), (3.5). Поправки, связанные с учетом  $\Omega_z$ , не влияют на результат. Следует иметь в виду, что принципиальная возможность существования систем валов, ориентированных под разными углами к границе, еще не означает физического равноправия (или равной реализуемости) всех ориентации — см. раздел 4.2.

2) "Микроскопические" уравнения Манвиля. Поскольку применимость амплитудных уравнений ограничена полями, не слишком сильно отличающимися от однородной валиковой структуры, возник вопрос о поиске таких средств описания конвекции, которые при достаточной простоте были бы свободны от этого ограничения.

Для описания динамики текстур с учетом крупномасштабного дрейфа Манвиль [38] предложил двумерную модель конвекции, которая относится к слою со свободными границами и малым надкритичностям  $\varepsilon$ . Процедура упрощения уравнений Буссинеска опирается на галеркинское разложение зависимости переменных от  $z$ . В окончательном представлении присутствуют только гармоники с  $n = 0$  — дрейфовое течение  $\mathbf{u}(x, y, t)$  — и  $n = 1$  — в виде амплитуды  $w(x, y, t)$  вертикальной скорости; считается, что вторые гармоники адиабатически отслеживают изменения первых и что по отношению к  $w$   $\Delta = -k_c^2 + O(\varepsilon^{1/2})$ ,  $\partial_t = O(\varepsilon)$ . Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_0 \partial_t w = & \left[ \varepsilon - \frac{\xi_0^2}{4k_c^2} (\Delta + k_c^2)^2 \right] w - \\ & - gw \left[ (\nabla w)^2 + k_c^2 w^2 \right] - \tau_0 (u_x \partial_x w + u_y \partial_y w), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$(\partial_t - P\Delta)\Delta\zeta = \frac{1}{k_c^2} (\partial_y w \partial_x \Delta w - \partial_x w \partial_y \Delta w), \quad (3.22)$$

$$u_x = \partial_y \zeta, \quad u_y = -\partial_x \zeta, \quad (3.23)$$

где  $\zeta$  — функция тока горизонтального дрейфа  $\mathbf{u}$ ,  $\tau_0$  и  $\xi_0$  даются формулами (2.26), а  $g = 1/6\pi^4$ . На границе двумерной области, где  $\mathbf{v} = 0$ , переменные  $w$ ,  $\zeta$  должны удовлетворять граничным условиям

$$w = \hat{n} \nabla w = 0, \quad \zeta = \hat{n} \nabla \zeta = 0. \quad (3.24)$$

В работе приведены качественные соображения о том, как должна измениться система (3.21) — (3.23), если горизонтальные границы слоя будут жесткими и дрейф будет не однородным по  $z$ , а похожим на течение Пуазейля.

В отличие от амплитудных уравнений, описанная модель оперирует с явным "микроскопическим" описанием структуры физических полей в быстрых пространственных координатах и меньше ограничивает детальную геометрию течения. Для системы слабо деформированных валов из (3.21) — (3.23) можно получить амплитудные уравнения (3.10) — (3.12), учитывающие дрейф.

3) Модельные уравнения. Для "микроскопического" описания структур предложены и разнообразные модельные уравнения, не выводимые из гидродинамических. Они определяют функцию  $w(x, y, t)$ , имеющую смысл вертикальной компоненты скорости или возмущения температуры в средней

плоскости  $z = 1/2$  конвективного слоя. Критерием пригодности модели считают сходство поведения решений модельного уравнения и известных решений полной гидродинамической системы.

Наиболее популярной моделью является уравнение

$$\tau_0 \partial_t w = \left[ \varepsilon - \frac{\xi_0^2}{4k_c^2} (\Delta + k_c^2)^2 \right] w - gw^3, \quad (3.25)$$

где  $w$  — действительная функция, иногда называемая *параметром порядка*  $\kappa a^{(5*)}$ ,  $\varepsilon$  — аналог относительной надкритичности, а  $\tau_0$ ,  $\xi_0$  и  $g$  имеют тот же смысл, что и в (3.6). Это уравнение было предложено (в вариационной формулировке и с дополнительным членом, учитывающим флуктуации) в [39] и получило название *уравнения (модели) Свифта—Хоэнберга* (СХ). Чаше его записывают в форме

$$\partial_t w = [\varepsilon - (\Delta + 1)^2] w - w^3, \quad (3.26)$$

которая получается из (3.25) соответствующим изменением масштабов переменных (после которого  $k_c = 1$ ) и переопределением  $\varepsilon$ .

Уравнение СХ обладает трансляционной и вращательной инвариантностью. При  $\varepsilon < 0$  имеется устойчивое решение  $w \equiv 0$ . Эта устойчивость теряется при критическом значении  $\varepsilon = 0$ , если возмущение имеет волновое число  $k = k_c$ , а надкритические случаи  $\varepsilon > 0$  характерны наличием стационарных пространственно-периодических решений, волновые числа которых лежат в интервале  $(k_c - \varepsilon^{1/2}, k_c + \varepsilon^{1/2})$ . Кроме того, на основе уравнения СХ может быть построено (по той же схеме, что и уравнение НВЗ) амплитудное уравнение. Оно оказывается совпадающим по форме с уравнением НВЗ [40]. В исследованиях по проблеме отбора уравнение СХ систематически используется, начиная с работы [41].

В [42, 43] в рамках одномерной задачи, наряду с уравнением СХ, рассматривается уравнение

$$\partial_t w = [\varepsilon - (\partial_x^2 + 1)^2] w - w \partial_x w. \quad (3.27)$$

Обобщением модели СХ является семейство уравнений [44]

$$\partial_t w = [\varepsilon - (\Delta + 1)^2] w - aw^3 - bw(\nabla w)^2 + cw^2 \Delta w, \quad (3.28)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — свободные параметры, используемые для наилучшей подгонки свойств решений под поведение реальных конвективных течений (см. раздел 6.3). Заметим, что уравнение Манвиля (3.21) при отсутствии дрейфа сводится к (3.28) с  $a=b=1$ ,  $c=0$ .

Другое семейство модельных уравнений [44]

$$\partial_t w = [\varepsilon - (\Delta + 1)^2] w + d(\Delta w)(\nabla w)^2 + (3 - d)(\partial_i w)(\partial_j w) \partial_i \partial_j w \quad (3.29)$$

обобщает уравнение (Герцберга—Сивашинского [45]), которое получено разложением уравнений конвекции для слоя, ограниченного пластинами с малой теплопроводностью, по параметру, определяющему медленные переменные, и соответствует случаю  $d = 1$ .

Модельные уравнения (3.25) — (3.29) никак не учитывают влияние дрей-

фа, который в реальной конвекции, как мы видели, связан с  $\Omega_z$ . Для описания дрейфовых эффектов в [44] было предложено модифицировать уравнения (3.28), (3.29), добавляя адвективный член, т.е. производя замену

$$\partial_t w \rightarrow \partial_t w + (\mathbf{U}\nabla)w, \quad (3.30)$$

где

$$\mathbf{U} = \text{rot}(\zeta \hat{\mathbf{z}}) \quad (3.31)$$

— дрейфовая скорость, определяемая функцией тока  $\zeta$ , которая находится из уравнения

$$\Delta \zeta = \gamma [\nabla \Delta w, \nabla w] \hat{\mathbf{z}} \quad (3.32)$$

(здесь  $\gamma$  — некоторая неотрицательная константа связи;  $-\Delta \zeta$  имеет смысл  $\Omega_z$ ).

Граничные условия для параметра порядка  $w$  обычно ставят в виде [46]

$$w = \hat{\mathbf{n}} \nabla w = 0 \quad (3.33)$$

на границах двумерной области. Они воспроизводят условия (3.18), (3.19) для амплитудной функции, а также в низшем порядке — (3.20). Для крупномасштабного потока в [44, 47] предложены условия

$$\zeta = \hat{\mathbf{n}} \nabla \zeta = 0. \quad (3.34)$$

4) Функционал Ляпунова. Уравнение НВЗ (3.7) может быть представлено в вариационном виде

$$\partial_t A = - \frac{\delta F}{\delta A^*}, \quad (3.35)$$

где

$$F = \int \left[ \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \varepsilon |A|^2 + \frac{1}{2} |A|^4 + |(\partial_x - i\partial_y^2)A|^2 \right] dx dy \quad (3.36)$$

— функционал Ляпунова (интегрирование в (3.36) выполняется по всей области течения), а  $\delta F / \delta A^*$  — вариационная (функциональная) производная. Константа  $\varepsilon^2/2$  включена в подынтегральное выражение, чтобы получить  $F = 0$  в случае постоянного по времени и координатам решения уравнения, когда  $|A|^2 = \varepsilon$ .

Амплитудное уравнение было получено в предположении слабой деформированности системы параллельных прямых валов. Рассчитывать на выполнение этого условия при жестких боковых стенках можно в случае прямоугольной области, когда основное направление валов совпадает с направлением пары боковых стенок. Для такой прямоугольной геометрии, пользуясь выражением (3.36), уравнением (3.7) и граничными условиями (3.18), (3.19), нетрудно получить, что

$$\frac{dF}{dt} = -2 \int \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 dx dy. \quad (3.37)$$

Это означает, что  $F$  убывает при любой динамике процесса, определяемой уравнением НВЗ. Поэтому функционал  $F$  часто называют *потенциалом* (другое название — *свободная энергия*<sup>(5\*)</sup>), а об уравнении НВЗ говорят, что оно

описывает *вариационную*, или *потенциальную*, или *релаксационную* динамику.

Другой пример потенциальной динамики — поведение системы, описываемой уравнением СХ (3.26). Это уравнение может быть получено как

$$\partial_t w = - \frac{\delta F}{\delta w} \quad (3.38)$$

на основе потенциала

$$F = \int \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \varepsilon w^2 + \frac{1}{4} w^4 + \frac{1}{2} [(\Delta + 1)w]^2 \right\} dx dy. \quad (3.39)$$

Монотонное убывание  $F$  обеспечивается, например, граничными условиями (3.33).

С учетом вертикальной компоненты завихренности и среднего дрейфа амплитудная функция описывается уравнениями (3.10) — (3.12). При этом динамика не является вариационной и становится таковой лишь в пределе  $P \rightarrow \infty$ . Однако, если границы слоя жесткие, то амплитудные уравнения низшего порядка соответствуют потенциальному поведению системы и при конечном  $P$ , поскольку  $\Omega_z$ , согласно (3.17), появляется в более высоком порядке.

Не является вариационным модельное уравнение (3.27), в семействе (3.28) потенциальны только те уравнения, у которых  $b = -c$ , а среди (3.29) — уравнение Герцберга—Сивашинского ( $d = 1$ ). Таким образом, уравнение Манвиля даже без учета дрейфа непотенциально. Включение с помощью соотношений (3.30) — (3.32) дрейфа нарушает потенциальность любой модели. Дело в том, что дрейфовая адвекция может приводить к возникновению периодических режимов, тогда как вариационная динамика монотонна.

5) **Фазовое уравнение**. Если амплитудное уравнение представляет течения как результат амплитудной модуляции периодических систем параллельных валов, то фазовое уравнение изображает их такими же структурами, промодулированными по фазе. Эта методика берет свое начало с работы Помо и Манвиля [41].

Формальная схема вывода фазового уравнения такова. Допустим,  $U_0(x, z)$  есть периодическое по  $x$  решение уравнений задачи, соответствующее системе стационарных двумерных  $x$ -валов. Тогда, в силу трансляционной инвариантности задачи,  $U_0(x + \varphi, z)$  (где  $\varphi$  — постоянный фазовый сдвиг) также является решением. При малых  $\varphi$

$$U_0(x + \varphi, z) = U_0(x, z) + \varphi \partial_x U_0(x, z). \quad (3.40)$$

Если допустить медленные пространственные и **временные изменения  $\varphi$** , то  $U_0(x + \varphi(x, y, t), z)$  решением уже не будет. Однако в таком случае можно искать решение исходной (нестационарной) задачи в виде

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, z) + \varphi(x, y, t) \partial_x U_0(x, z) + U_1 + U_2 + \dots, \quad (3.41)$$

где  $U_1 = O(\nabla \varphi)$ ,  $U_2 = O(\nabla \nabla \varphi)$ , и т.д. Уравнения фазовой динамики находятся в виде условий разрешимости линейных систем уравнений, получаемых на последовательных шагах разложения.

Очевидно, фазовое описание ограничено такими случаями, когда амплитуда валов при деформациях практически не меняется. В этом его отличие от амплитудного уравнения, оперирующего с комплексной функцией огибающей и учитывающего таким образом вариации и амплитуды, и фазы.

Помо и Манвиль [41] в качестве исходного уравнения для построения разложения (3.41) воспользовались модельным уравнением СХ и в низшем нетривиальном порядке этого разложения при малых надкритичностях получили уравнение диффузии фазы в виде

$$\partial_t \varphi = D_{\parallel} \partial_x^2 \varphi + D_{\perp} \partial_y^2 \varphi, \quad (3.42)$$

где  $D_{\parallel}$ ,  $D_{\perp}$  выражаются через  $\varepsilon$ ,  $k_c$  и  $q = k - k_c$ .

Манвиль и Пикмаль [48, 49] выполнили процедуру градиентного разложения применительно к полной системе уравнений Буссинеска. В их работе исследованы случаи и жестких, и свободных границ, но рассматриваются только поперечные, или зигзаговые, возмущения исходной системы  $x$ -валов (т.е. возмущения с волновым вектором в направлении  $y$ ). Учет крупномасштабного дрейфа (который, как уже было сказано, в случае свободных границ постоянен по  $z$ ) показывает, что этот дрейф обусловлен кривизной валов и направлен таким образом, что стремится искривленные валы выпрямить. При жестких границах слоя это не нарушает диффузионного характера релаксации зигзаговых возмущений, поэтому авторы учли дрейф в эффективном коэффициенте  $D_{\perp}$  (он больше, чем без учета дрейфа):

$$D_{\perp}^{\text{eff}} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left( \frac{k - k_c}{k_c} + \frac{N(P)}{R_2(P)} \frac{R - R_c}{R_c} \right), \quad (3.43)$$

где  $\xi_0$ ,  $\tau_0$  соответствуют (2.24), (2.25),  $N(P) = 0,166 + 23,04P^{-1} + 6,196P^{-2}$ ,  $R_2(P) = 10,76 - 0,073P^{-1} + 0,128P^{-2}$ . Если же слой имеет свободные границы, процесс оказывается не диффузионным, а колебательным (о колебательной неустойчивости будет сказано в разделе 6.3). В [48, 49]  $D_{\perp}^{\text{eff}}$  обозначено как  $D_{\perp}$ .

Фазовое уравнение может быть получено в результате процедуры амплитудного разложения НВЗ [50, 51, 29].

б) Уравнение Кросса — Ньюэлла. Более общий подход к описанию фазовой динамики принадлежит Ньюэллу и Кроссу [52, 53]. Первой примечательной чертой его является то, что он не привязан к области малых надкритичностей: в качестве малого параметра используется обратное аспектное отношение. Кроме того, геометрия течения не сводится к слабо деформированным прямым параллельным валам и может быть весьма разнообразной. Требование малости отклонения фазы от  $kx$  не вводится, и нужно лишь, чтобы размеры и ориентация валов, а также амплитуда скорости в них медленно менялись в пространстве и времени. Метод аналогичен нелинейному методу ВКБ [54].

Авторы получили свое уравнение, исходя из двух вариантов модельного описания конвекции (хотя схема его вывода довольно универсальна):

$$\text{I. } [\partial_t - (\Delta - 1)](\Delta - 1)^2 w + (R - ww^* - vww^* \Delta) \Delta w = 0, \quad (3.44)$$

$$\text{II. } \partial_t w + (\Delta + 1)^2 w - R w + w^2 w^* = 0. \quad (3.45)$$

В каждом уравнении  $w(x, y, t)$  — комплексное скалярное поле, а  $R$  — аналог числа Рэлея. Линейная часть модели I совпадает с линеаризованным уравнением для вертикальной компоненты скорости, получающимся в приближении

Буссинеска при  $P = \infty$ , если слой имеет свободные поверхности и, соответственно, вертикальная зависимость  $w$  имеет вид  $\sin \pi z$ . Модель II отличается от модели СХ (3.26) только комплексностью  $w$ .

Обе модели обладают семейством пространственно-периодических стационарных решений вида

$$w(x, y) = Ae^{i\theta}, \quad \theta = \mathbf{kx}, \quad (3.46)$$

причем  $k$  и  $A$  связаны между собой уравнением эйконала

$$I. \quad R - A^2(1 - \nu k^2) = \frac{(k^2 + 1)^3}{k^2}, \quad (3.47)$$

$$II. \quad R - A^2 = (k^2 - 1)^2, \quad (3.48)$$

которое отражает вращательное вырождение решений, поскольку не учитывает ориентации вектора  $\mathbf{k}$ .

При рассмотрении реального конвективного течения, более сложного, чем система прямых параллельных валов, несущего на себе отпечаток начальных и граничных условий, естественно попытаться описать структуру этого течения локально-периодическим решением с локальным волновым вектором  $\mathbf{k}$ , непрерывно и медленно меняющимся по горизонтали. Введем медленные переменные

$$X = \eta^2 x, \quad Y = \eta^2 y, \quad T = \eta^4 t, \quad (3.49)$$

где малый параметр  $\eta^2$  есть отношение характерной ширины вала (или толщины слоя) к горизонтальному размеру резервуара (обратное аспектное отношение). Локальный волновой вектор определим как градиент фазы:

$$\mathbf{k}(X, Y, T) \equiv \{m, n\} = \nabla_{\mathbf{x}} \theta = \nabla_{\mathbf{X}} \Theta, \quad (3.50)$$

где  $\nabla_{\mathbf{x}} = \{\partial_x, \partial_y\}$ ,  $\nabla_{\mathbf{X}} = \{\partial_X, \partial_Y\}$ , а быстрая фаза  $\theta$  связана с медленной  $\Theta$  соотношением

$$\theta(x, y, t) = \frac{1}{\eta^2} \Theta(X, Y, T). \quad (3.51)$$

Решения уравнений (3.44), (3.45) будем искать в виде

$$w(x, y, t) = w^{(0)}(\theta; X, Y, T) + \sum_p \eta^{2p} w^{(p)}(\theta; X, Y, T), \quad (3.52)$$

где

$$w^{(0)}(\theta; X, Y, T) = f(\theta; A, k) = Ae^{i\theta}, \quad (3.53)$$

причем  $A$  и  $k$ , будучи уже не константами, а функциями медленных переменных  $X, Y, T$ , по-прежнему связаны соотношениями (3.47), (3.48). Подставляя (3.52) в (3.44), (3.45), решая получаемые обыкновенные дифференциальные уравнения для  $w^{(0)}, w^{(1)}, \dots$  и требуя, чтобы каждое  $w^{(p)}$  ( $p \geq 1$ ) было  $2\pi$ -периодической функцией  $\theta$ , находим нетривиальные условия разрешимости — последовательные приближения к уравнению динамики фазовой переменной  $\Theta(X, Y, T)$ . (Если  $R$  близко к  $R_c$ , амплитуда  $A$  не может рассматриваться как алгебраическая функция локального волнового числа и описывается уравнением в частных производных.)

Фазовое уравнение Кросса—Ньюэлла (КН) имеет весьма универсальную форму, не зависящую от деталей модели. В частности, эта его структура характерна и для разложения, основанного на уравнениях Буссинеска при  $P \rightarrow \infty$ . Не влияет на форму уравнения и вариационность исходной модели: заметим, что модель II вариационна, а I — нет (однако влияет наличие среднего дрейфа — см. ниже). Уравнение КН записывается в виде

$$\tau(k)\partial_T\Theta = -\nabla_X \cdot (\mathbf{k}B(k)), \quad (3.54)$$

причем для рассмотренных моделей соответственно:

$$\text{I. } \tau(k) = A^2 k^2 (1 - \nu k^2)(k^2 + 1)^2, \quad B(k) = A^2 \frac{dA^2}{dk^2} k^4 (1 - \nu k^2)^2, \quad (3.55)$$

$$\text{II. } \tau(k) = A^2, \quad B(k) = A^2 \frac{dA^2}{dk^2}, \quad (3.56)$$

и  $A^2$  как функция  $k^2$  определяется асимптотическими разложениями уравнения эйконала (3.47), (3.48)

$$\text{I. } R - A^2(1 - \nu k^2) = R_0 + \nu^2 R_2 + \nu^4 R_4 + \dots, \quad (3.57)$$

$$\text{II. } R - A^2 = R_0 + \nu^2 R_2 + \dots \quad (3.58)$$

где  $R_0 = (k^2 + 1)^3/k^2$ ,  $(k^2 - 1)^2$  для двух моделей соответственно,  $R_2 = 0$ ,  $R_4$  содержит члены вида  $\partial_T A/A$ ,  $\partial_X^2 A/A$  и т.п. В работе приводится еще одна форма записи уравнения (3.54) — она удобна для исследования устойчивости:

$$\begin{aligned} \tau(k)\partial_T\Theta + \left(B + \frac{m^2}{k} \frac{dB}{dk}\right) \partial_X^2 \Theta + \frac{2mn}{k} \frac{dB}{dk} \partial_X \partial_Y \Theta + \\ + \left(B + \frac{n^2}{k} \frac{dB}{dk}\right) \partial_Y^2 \Theta = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Для того, чтобы можно было исследовать области, где стыкуются фрагменты по-разному ориентированных валиковых структур (структурные границы — см. раздел 4.3) и, следовательно, происходит более быстрое, чем в этих фрагментах, пространственное изменение переменных, авторы получили фазовое уравнение и более высокого приближения, чем (3.54).

Включение в рассмотрение среднего дрейфа требует внесения поправки в фазовое уравнение. В [53] из феноменологических соображений авторы видоизменили его следующим образом:

$$\partial_T\Theta = -\frac{1}{\tau(k)} \nabla_X \cdot (\mathbf{k}B(k)) - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}, \quad (3.60)$$

где

$$\mathbf{U} = [\nabla_X, \hat{\zeta} \hat{\mathbf{z}}], \quad (3.61)$$

$$\Delta \hat{\zeta} = \gamma [\nabla_X, \{\mathbf{k}(\nabla_X \cdot (\mathbf{k}A^2))\}] \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.62)$$

$\gamma$  — константа связи. Для обоснования такого выбора была рассмотрена модификация общей формальной схемы вывода фазового уравнения, нужная

для учета дрейфа, и проведен такой вывод применительно к полной системе уравнений Буссинеска при жестких границах слоя — но с дополнительным предположением малой надкритичности.

Наконец, совсем недавно Ньюэлл с соавторами [210], следуя описанному подходу, выполнили разложение по  $\eta^2$  полной системы уравнений Буссинеска при произвольных  $R$  и  $P$  для слоя с жесткими границами. Уравнения фазовой диффузии и среднего дрейфа были получены из условий разрешимости соответственно в порядках  $\eta^2$  и  $\eta^4$ . Уравнения, возникающие в порядке  $\eta^2$ , сводятся галеркинским разложением к сингулярной системе алгебраических уравнений. Для ее решения потребовался специальный метод, нечувствительный к ошибкам. В конечном итоге уравнения для фазы  $\Theta$  и горизонтальной скорости, усредненной по вертикали с некоторым весом,  $\mathbf{V}$ , приобретают вид

$$\partial_T \Theta = - \frac{1}{\tau(k)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{k}B(k)) - \rho(k) \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}, \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{k}} \alpha([\hat{\mathbf{k}}, \nabla_{\mathbf{x}} \zeta] \cdot \hat{\mathbf{z}})] - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \beta \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \zeta) = \\ = \hat{\mathbf{z}} \cdot \left[ \nabla_{\mathbf{x}}, \left\{ \frac{1}{P} \mathbf{k} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{k}A^2) - \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\tau_{\alpha}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{k}B_{\alpha}) \right\} \right] - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} [\nabla_{\mathbf{x}}, \mathbf{k}B_{\beta}] \cdot \hat{\mathbf{z}}), \end{aligned} \quad (3.64)$$

где

$$\mathbf{V} = [\nabla_{\mathbf{x}}, \zeta \hat{\mathbf{z}}], \quad (3.65)$$

$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ , а  $B, B_{\alpha}, B_{\beta}, \tau, \tau_{\alpha}, \rho, \alpha, \beta, A^2$  — явно вычисленные функции  $k$ . Величина  $\rho \mathbf{V}$  — аналог  $\mathbf{U}$  в (3.60) — играет роль эффективного среднего дрейфа, переносящего фазу (причем, вообще говоря,  $\text{div } \rho \mathbf{V} \neq 0$ ). Уравнение (3.64) свелось бы к (3.62), если бы профиль горизонтальной скорости, усредненной по переменной  $\theta$  на интервале длиной  $2\pi$ , имел параболическое (пуазейлево) распределение по  $z$  (тогда бы выпадали члены с  $B_{\alpha}$  и  $B_{\beta}$ , а также было  $\alpha = \beta = \text{const}$ ). В действительности это не так.

Если  $P = \infty$ , а координатная ось  $X$  направлена параллельно локальному вектору  $\mathbf{k}$ , то уравнение диффузии фазы совпадает по форме с уравнением Помо и Манвиля (3.42):

$$\partial_T \Theta = D_{\parallel}(k) \partial_X^2 \Theta + D_{\perp}(k) \partial_Y^2 \Theta, \quad (3.66)$$

где

$$D_{\parallel} = - \frac{1}{\tau(k)} \frac{d}{dk} (kB), \quad D_{\perp} = - \frac{1}{\tau(k)} B(k). \quad (3.67)$$

Однако теперь  $\mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{x}} \Theta$  не есть малое возмущение фиксированного волнового вектора.

В качестве граничных условий на боковых стенках в широких пределах применимы соотношения [210]

$$\mathbf{k} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{V} \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (3.68)$$

а при существенном пограничном тепловом вынуждении (см. конец раздела 4.2) вместо первого из них —

$$[\mathbf{k} \hat{\mathbf{n}}] = 0. \quad (3.69)$$

**3.2.3. Численное моделирование.** Подробное обсуждение методов численного решения уравнений конвекции (конечно-разностных и спектральных) выходит за рамки этого обзора. Составить представление о конечно-разностных методах можно по монографии [55]. Основные идеи спектральных методов, которые успешно конкурируют с конечно-разностными в геометрически простых задачах (к которым относится предмет нашего обсуждения) и обладают рядом серьезных преимуществ, подробно рассмотрены в [56].

Отметим здесь некоторые принципиальные моменты в постановке задач, имеющих отношение к рассматриваемым проблемам.

При численных расчетах трудоемкость исследования меньше зависит от выбора граничных условий, чем при аналитических, поэтому гораздо чаще рассматривается "реалистический" случай жестких границ слоя. Впрочем, алгоритмы расчетов спектральными (галеркинскими) методами все же выглядят проще, если границы свободные.

Моделируя бесконечный слой, большинство исследователей ставят на боковых границах расчетной области условия периодичности всех рассматриваемых полей, так что область оказывается одним пространственным периодом в бесконечной периодической картине. Некоторые авторы исследуют влияние боковых стенок и выполняют расчеты для полости конечных горизонтальных размеров (например, [57, 58]). Рассматривалась и такая постановка задачи, в которой вообще устранено влияние каких-либо боковых границ на моделируемое течение [59, 60].

Значительную долю численных исследований конвекции вообще и проблемы отбора в частности составляют расчеты в рамках двумерной геометрии (например, [61, 62]), что кажется вполне естественным, поскольку в большом диапазоне параметров конвекция имеет квазидвумерный валиковый характер (см. гл. 4 и 5). На этом пути удастся прояснить многие важные вопросы, и двумерные численные эксперименты не утратили своего значения по сей день (пример весьма интересной новой работы — [57]).

Примерно с начала 70-х годов начали выполняться расчеты трехмерной конвекции — вначале для областей с небольшими аспектными отношениями [63, 64], а в последнее время и для довольно протяженных по горизонтали — например, в [58] область имеет размеры 11,5x16x1.

Тем не менее, обстоятельные исследования динамики трехмерных конвективных структур посредством численного эксперимента весьма трудоемки. Разработанные двумерные модели трехмерной конвекции позволяют (в пределах ограничений самих моделей) составить представление о сложной пространственной динамике процесса, пользуясь сравнительно экономными средствами. Поэтому имеется уже немало работ, в которых численное моделирование трехмерной конвекции выполнено на основе двумерных модельных уравнений ([65 — 70, 47] и др.).

## **4. Основные типы структур конвективных течений**

**4.1. Двумерные валы и трехмерные ячейки.** В гл. 2 отмечалось, что различные планформы течений в линейной задаче о конвекции в бесконечном слое вырождены. Это вырождение не снимается и при рассмотрении стационарных нелинейных надкритических режимов: при данном  $R$  существует бесконечно много решений с данным  $k$ , различающихся лишь планформой [21]. Возникает, таким образом, вопрос об отборе реализуемых планформ.

Под влиянием экспериментов Бенара [71], который наблюдал структуру течения с симметрией пчелиных сот (подъем жидкости в центре каждой ячейки — шестиугольной призмы — и опускание по краям; см. рис. 2,б), сложилось мнение, что основная форма ламинарной стационарной конвекции в горизонтальном слое — шестиугольные ячейки<sup>(6\*)</sup> (*ячейки Бенара*). Позднейшие исследования выявили коренное различие в структуре течений между случаями, когда верхняя поверхность слоя свободна (как у Бенара) и когда слой прикрыт сверху твердой пластиной. При наличии такой пластины в довольно широком диапазоне значений числа  $R$ , если  $P$  не слишком мало, установившееся течение имеет вид системы валов (рис. 2,а); это утверждение будет уточнено в гл. 5. Если отвлечься от обычно присутствующих нерегулярностей, или структурных дефектов, то поле скоростей такой конвекции приблизительно двумерно (см., например, [72, 74, 75]). Речь здесь идет об "основном" течении, которое не осложнено вторичными течениями, развившимися вследствие потери им устойчивости (что неизбежно при достаточно больших  $R$ ), и предполагается отсутствие факторов, из-за которых условия эксперимента заметно отклоняются от условий стандартной задачи (гл. 2), — об этих факторах речь пойдет ниже.

Еще сам Бенар высказывал предположение, что в наблюдавшейся им конвекции важную роль играет температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения. В дальнейшем это подтвердилось, и, по современной интерпретации, существование шестиугольных ячеек в опытах Бенара было обусловлено достаточно сильным термокапиллярным эффектом. Если же свободной поверхности нет, и происходит лишь обычная (*термогравитационная*) конвекция, предпочтительным структурным типом является валиковый. (Разумеется, часто используемые в теории идеализированные граничные условия для "свободной" границы (2.8) не влекут за собой предпочтительности шестиугольников, поскольку не учитывают поверхностного натяжения.) Отметим, что до сих пор в литературе можно встретить ошибочное утверждение, будто термогравитационный механизм в стандартных условиях сам по себе способен создать шестиугольные ячейки.

Исходя из положения, что квазидвумерные валы представляют собой основную форму стационарной конвекции, перечислим наиболее важные исследованные факторы, которые могут сделать предпочтительными трехмерные ячейки.

**4.1.1. Термокапиллярный эффект.** Первая экспериментальная работа, весьма определенно продемонстрировавшая роль поверхностного натяжения в формировании шестиугольных ячеек, принадлежит Блоку [76]. В частности, ему удалось наблюдать ячейки при  $R < R_c$  (и даже  $R < 0$ ), когда термогравитационный механизм "отключен".

Объем исследований термокапиллярной конвекции, или конвекции Бенара—Марангони, на сей день не слишком велик. Не вдаваясь в подробности, можно порекомендовать читателю в качестве краткого введения в эту область соответствующие разделы обзоров [77, 78] и вступительную часть статьи [79].

Существенные экспериментальные результаты получены в работах [80, 79, 81]. Интересное сопоставление данных эксперимента и теории, касающихся отбора планформ при совместном действии двух неустойчивостей — обычной конвективной (Рэлея) и термокапиллярной (Бенара—Марангони), проведено в [82]. В [81] экспериментально найдено, что при взаимодействии этих двух механизмов по мере увеличения  $\Delta T$  после возникновения бенаровских ячеек их характерный размер вначале уменьшается, а затем начинает

расти. Поскольку для термогравитационной конвекции характерен рост масштаба течения с  $\Delta T$  (см. раздел 6.1), делается вывод, что рэлеевский механизм преобладает при достаточно больших  $\Delta T$ . Имеются эксперименты по термокапиллярной конвекции в невесомости — при "отключенном" рэлеевском механизме — на борту космических аппаратов [83].

Теоретические исследования ведут свою историю с линейного анализа устойчивости в работах [84] (где принималось отсутствие гравитации) и [85] (где рассматривалась комбинация двух механизмов). В рамках нелинейных задач планформы термокапиллярной конвекции изучались в [86] (где, согласно [32], количественные результаты требуют уточнения), [32] (см. п. 3.2.2), [87, 88].

**4.1.2., Температурная зависимость вязкости.** Еще в 30-е годы Грэхэм [89], наблюдая конвективные ячейки-многоугольники в слое воздуха, обнаружил, что в стационарных условиях в центральных частях ячеек вещество опускается — в противоположность тому, что имеет место в жидкостях (см. рис. 2; ячейки с восходящим движением в центре иногда называют ячейками *l-типа*, а с нисходящим — *g-типа*, соответственно от слов liquid и gas — жидкость и газ; метеорологи называют ячейки *l-типа закрытыми*, а *g-типа — открытыми*). Он высказал соображения, согласно которым направление циркуляции зависит от знака производной  $\partial\nu/\partial T$ : у жидкостей она обычно отрицательна, а у газов — положительна. Подтверждение этой гипотезе было найдено в экспериментах Типпельскирха [90] с жидкой серой, у которой  $\partial\nu/\partial T < 0$  при  $T < 153^\circ\text{C}$  и  $\partial\nu/\partial T > 0$  при  $153^\circ\text{C} < T < 200^\circ\text{C}$ . Конвективные ячейки в двух указанных температурных диапазонах действительно принадлежат *l-* и *g-*типу соответственно.

Видно, что реализуется такое направление циркуляции, при котором меньше вязкие напряжения в центральной части ячейки, где они максимальны в силу геометрии течения.

Пальм [91] рассматривал слабонадкритическую конвекцию в жидкости, вязкость которой зависит от температуры по закону

$$\nu = \nu_0 + \gamma \cos \mu(T - T_1), \quad (4.1)$$

причем считается, что  $(\gamma/\nu_0)^2 \ll 1$ . Допущение такой зависимости — это, очевидно, отход от приближения Буссинеска. Анализируя взаимодействие различных мод при низшем волновом числе, равном критическому (последнее имеет поправку  $O(\gamma^2/\nu_0^2)$  по сравнению со случаем  $\nu = \text{const}$ ) и используя малость надкритичности и параметра  $\gamma$ , автор выделил среди этих мод две наиболее существенные, дающие функцию планформы в виде

$$f(x, t) = Y(t) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_c x\right) \cos\left(\frac{1}{2} k_c y\right) + Z(t) \cos k_c y \quad (4.2)$$

[ср. (2.28)]. Из анализа нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих **временное** изменение амплитуд  $Y$  и  $Z$ , следует, что предельное при  $t \rightarrow \infty$  стационарное состояние системы характеризуется соотношением  $Y = 2Z$ , т.е. соответствует шестиугольным ячейкам. Направление циркуляции в ячейке определяется знаком коэффициента  $\gamma$  в согласии с экспериментально найденным законом.

Детальное исследование [92, 93] исправленной Пальмом системы уравнений для  $Y$  и  $Z$  показало, что вблизи  $R = R_c$  при достаточно больших  $\gamma$  шестиугольные ячейки являются единственной устойчивой формой конвектив-

ного течения, причем вывод о зависимости направления циркуляции от знака  $\gamma$  сохраняет свою силу. Эти ячейки возможны и при подкритических значениях  $R$ , если амплитуда начального возмущения достаточно велика (жесткое возбуждение). Как найдено в [94], где включен в рассмотрение более широкий набор взаимодействующих мод, с ростом  $R$  становятся устойчивыми двумерные валы, а затем теряют устойчивость шестиугольники<sup>(7\*)</sup>. Наконец, аналогичный результат при использовании такого рода техники получен в [95], где допускалась вариация с температурой не только вязкости, но и других материальных параметров среды, а также деформация свободных поверхностей слоя.

В работах [91 — 95] горизонтальные границы слоя считались свободными. Расчеты интервала чисел Рэлея, в котором устойчивы шестиугольные ячейки, для других граничных условий приведены в [96].

Шлютер, Лорц и Буссе [25] путем разложения уравнений Буссинеска (с  $\nu = \text{const}$ ) по малой амплитуде  $\epsilon^{1/2}$  течения исследовали в линейном приближении устойчивость стационарных решений слабонелинейной задачи, имеющих разнообразную геометрию, относительно широкого класса бесконечно малых возмущений. Результаты этой и вышеупомянутых работ складываются в единую картину, из которой видна роль температурной зависимости вязкости. Согласно [25], при  $\nu = \text{const}$  все трехмерные течения неустойчивы, и существует лишь класс устойчивых двумерных валиковых течений (устойчивость валов будет рассмотрена в разделе 6.3). Этот результат справедлив и при свободных, и при жестких границах слоя.

Метод, развитый в [25], был применен к жидкости, вязкость которой слабо зависит от температуры (другие материальные параметры — вообще говоря, тоже; об этом см. далее) [97, 98]. Рис. 4 представляет полученную (для различных типов граничных условий) диаграмму устойчивости валов и шестиугольных ячеек, а рис. 5 — зависимость амплитуд течений обоих видов от  $R$ . В данном случае  $\beta$  имеет смысл (малого) коэффициента в главном (линейном) члене зависимости  $\nu(T)$ .

Последующие экспериментальные исследования в общих чертах подтвердили закономерности, предсказанные теоретически.

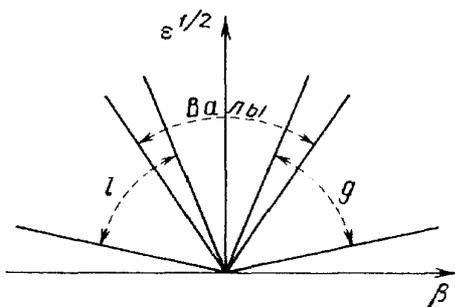


Рис. 4. Области устойчивости валов и шестиугольных ячеек  $l$ - и  $g$ -типов [98, 22].  $\epsilon^{1/2}$  — амплитуда течения,  $\beta$  — характеристика неоднородности слоя по вертикали (см. текст)

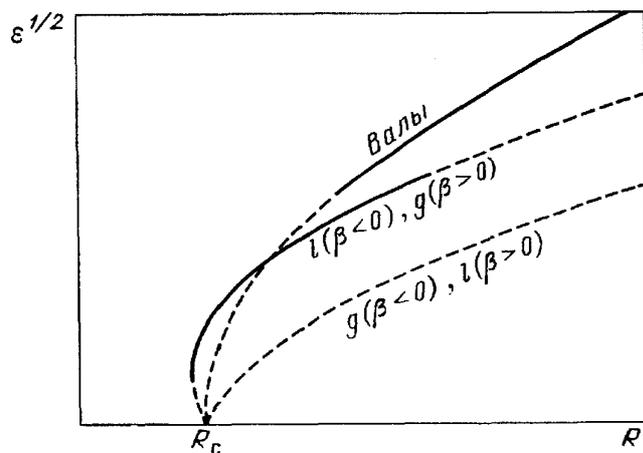


Рис. 5. Зависимость амплитуд валов и шестиугольных ячеек  $l$ - и  $g$ -типа от числа Рэлея  $R$  [98, 22].  $\epsilon^{1/2}$  и  $\beta$  имеют тот же смысл, что и на рис. 4. Сплошные линии — устойчивые течения, штриховые — неустойчивые

Жидкости с разным поведением вязкости могут демонстрировать разные конвективные структуры в сходных экспериментальных условиях [99]. В опытах на силиконовом масле с мало меняющейся вязкостью наблюдались либо конвективные валы — в закрытом сверху слое, либо шестиугольники — в открытом, где действует термокапиллярный эффект. Если же использовался арохлор, вязкость которого сильно зависит от температуры, то шестиугольники возникали и в закрытом слое, если он был достаточно тонким и, соответственно, градиент температуры — достаточно большим.

В работе [100] создавались контролируемые начальные возмущения валиковой геометрии и при разных значениях отношения  $\nu_{\max}/\nu_{\min}$  максимальной и минимальной вязкости в слое исследовалась зависимость устойчивости индуцированных валов от  $k$  и  $R$  ( $R$  рассчитывалось по значению  $\nu(T_0)$  вязкости при температуре  $T_0 = (T_1 + T_2)/2$ ; такое определение принято в большинстве работ). Величина  $\nu_{\max}/\nu_{\min}$  для использованных рабочих жидкостей (глицерина и полибутенового масла) достигала примерно 20. Было найдено, что при достаточно малых  $R$  и больших  $\nu_{\max}/\nu_{\min}$  валы в процессе эволюции переходят в шестиугольные ячейки (если затем увеличить  $R$ , то обратный переход происходит тем легче, чем менее правильной была система шестиугольников).

Гораздо **бóльшие** отношения  $\mu_{\max}/\mu_{\min}$  (до 3400) достигались в экспериментах [101, 102] с неконтролируемыми начальными условиями на безводном глицерине. Оказалось, что переход от шестиугольников к валам при увеличении  $R$  наблюдается лишь в том случае, если параметр  $\eta = \ln(\nu_{\max}/\nu_{\min})$  не превышает, грубо говоря 2. При этом интервал чисел Рэлея, в котором шестиугольники устойчивы, растет с  $\eta$  и согласуется с теоретическими результатами [97, 98]. При больших же  $\eta$  шестиугольники переходят с ростом  $R$  не в валы, а в системы неправильных четырех-, пяти- и шестиугольников, и теперь интервал устойчивости шестиугольников, наоборот, сужается по мере **увеличения**  $\eta$ . В свою очередь, нерегулярные картины многоугольников переходят с дальнейшим ростом  $R$  в системы квадратных ячеек, если  $\eta \geq 4$ . Эти экспериментальные данные представлены на рис. 6.

В экспериментах на светлой патоке (golden syrup) с контролируемыми начальными условиями [19] исследовалась устойчивость квадратов и шестиугольников при  $R \leq 63000$  ( $R$  рассчитывалось, как в [100]) и  $\nu_{\max}/\nu_{\min} \leq 10^3$ . Для обеих платформ были найдены ограниченные области устойчивости на плоскости  $(k, R)$ , аналогичные "баллону Бýссе" для валов (см. раздел 6.3). С ростом  $\nu_{\max}/\nu_{\min}$  эти области сдвигаются в сторону **бóльших**  $k$ . Подкритическая конвекция наблюдалась в форме квадратов, а не шестиугольников (автор опирается на свои расчеты  $R_c$  для зависимости  $\nu(T)$  типа реализуемой в эксперименте). В работе описаны различные неустойчивости и многие типы переходов между течениями разной структуры.

Теоретическое исследование возможности существования квадратных ячеек было начато с изучения их устойчивости [103, 104]. Как и в серии работ по устойчивости валов (раздел 6.3), основное течение рассчитывалось методом Галеркина, а его устойчивость анализировалась в линейном приближении. Границы слоя считались жесткими. Было найдено, что при однородной вязкости квадратные ячейки неустойчивы [103]. Для случая линейной зависимости динамической вязкости  $\mu$  от температуры устойчивость таких ячеек при данном  $R$  зависит от отношения  $r = \mu_{\max}/\mu_{\min}$  [104]. Ограничившись лишь

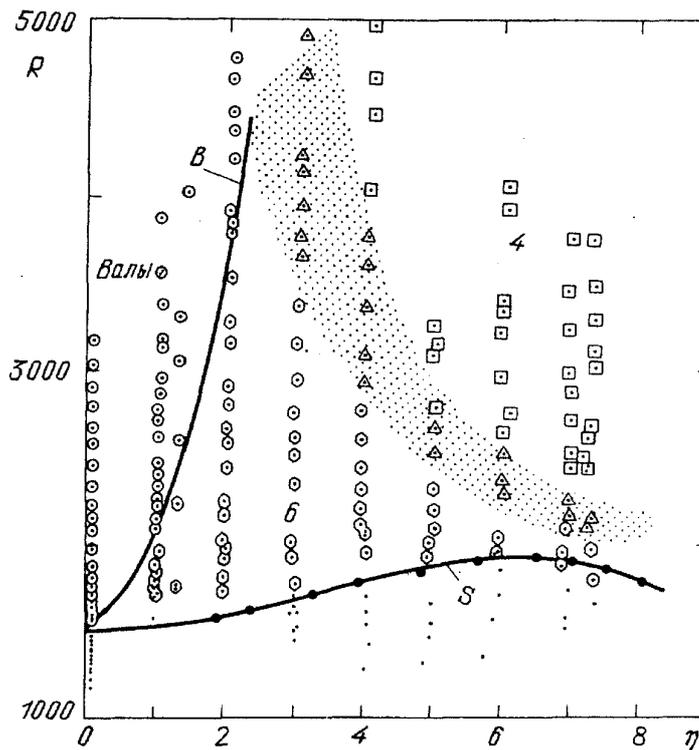


Рис. 6. Области устойчивости валов, шестиугольных (6) и квадратных (4) ячеек в жидкостях, вязкость которых зависит от температуры [102];  $\eta = \ln(\nu_{\max}/\nu_{\min})$ ; число Рэлея  $R$  рассчитано по  $\nu(T_0)$ ;  $S$  — зависимость критического числа Рэлея от  $\eta$  для слоя с границами конечной теплопроводности по [101];  $B$  — теоретические значения максимального  $R$ , при котором шестиугольные ячейки должны быть устойчивы [97]. В заштрихованной переходной области наблюдаются неправильные четырех-, пяти- и шестиугольники. Точки соответствуют отсутствию конвективных движений

случаем, когда волновое число течения равно  $k_c$ , а возмущения имеют ту же симметрию и то же волновое число, что и основное течение, авторы нашли, что с ростом  $r$  сначала становятся устойчивыми квадраты, а затем теряют устойчивость валы.

Впоследствии возможность квадратных ячеек исследовалась [105] путем решения задачи об эволюции течения с функцией планформы

$$f(\mathbf{x}) = A(t)\cos k_c x + B(t)\cos k_c y \quad (4.3)$$

[ср. (2.29)] при малой надкритичности, жестких границах и двух вариантах зависимости  $\mu(T)$  — линейной и экспоненциальной. Исследовалось также влияние конечной теплопроводности границ (об этом см. ниже). При линейной функции  $\mu(T)$  результаты качественно согласуются с [104], но получены другие критические значения параметра  $r$ , при которых происходят переходы (причина расхождения, как утверждает автор, в том, что техника [104] пригодна лишь для малых  $r$ ). При экспоненциальной зависимости  $\mu(T)$  найдены критические значения  $r_1, r_2, r_3$ , разграничивающие следующие режимы: при  $r < r_1$  течение имеет валиковую структуру; при  $r_1 < r < r_2$  квадратные ячейки существуют в надкритических режимах; при  $r_2 < r < r_3$  возможна подкритическая конвекция в форме квадратов; при  $r > r_3$  и валы, и квадраты могут существовать в подкритических условиях.

Высказывалось мнение [106], что решение с функцией планформы (2.29) нефизично, поскольку в нем присутствуют не все характерные черты реально наблюдаемых конвективных ячеек. Однако численное моделирование преломления света при теневой визуализации с автоматической выдачей результатов в виде модельных "теневых картин" с помощью лазерного принтера [107] показало, что течение вида (2.29) дает картину, весьма близкую к наблюдаемой. Интересно, что эта картина вовсе не похожа на шахматную доску, как можно было бы предполагать, исходя из взаимного расположения теплых восходящих и холодных нисходящих потоков. При теневой визуализации не происходит простого вертикального усреднения температур (поэтому картина может сильно изменить свой вид при обращении знака конвективной скорости). Вместо шахматной доски получается что-то вроде негативного изображения бумаги "в клетку" — темные квадраты со светлыми границами.

**4.1.3. Температурная зависимость других материальных параметров среды.** Вариация других характеристик вещества с температурой играет в принципе ту же роль, что и вариация вязкости. В упоминавшихся работах [97, 98] допускался выход за рамки приближения Буссинеска в следующей форме: коэффициент теплового расширения был записан как

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 + \frac{\gamma_1}{\Delta T} (T - T_0) + \dots \right], \quad (4.4)$$

где  $T_0 = (T_1 + T_2)/2$ , и аналогично — кинематическая вязкость, теплопроводность и теплоемкость при постоянном давлении (соответственно с коэффициентами  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ), причем нелинейные по  $T - T_0$  члены имеют более высокие порядки малости, чем линейные. Анализ устойчивости валов и шестиугольных ячеек показал, что определяющая роль принадлежит параметру  $\beta$ , который представляет собой некоторую линейную комбинацию всех  $\gamma_i$  в зависимостях вида (4.4). Диаграммы устойчивости (см. рис. 4) и зависимости амплитуд от  $R$  (см. рис. 5) отражают таким образом влияние неоднородности каждой из упомянутых величин.

Аналогичный вывод о характере перехода от шестиугольников к валам по мере роста  $R$  (при возможности конечноамплитудного возбуждения шестиугольных ячеек в подкритическом режиме) был сделан в [95], где такой эффект получен как следствие температурной зависимости вязкости, теплопроводности и коэффициента теплового расширения. В работе использован такого же рода подход, что и в [91, 92, 94].

Из экспериментов видно [108], что по мере уменьшения толщины слоя и увеличения  $\Delta T$  температурная зависимость физических свойств жидкости проявляет себя в структуре течений все ярче.

Влияние зависимости  $\alpha(T)$  на форму конвекции наблюдалось [109] в экспериментах с водой при температурах, близких к  $4^\circ\text{C}$  (когда  $\alpha$  варьирует от 0 до конечных значений). Лазерная доплеровская анемометрия показала, что вблизи критического режима пространственное распределение вертикальной скорости имеет вид, типичный для системы шестиугольных ячеек. С увеличением  $\Delta T$  происходит гистерезисный переход к валиковой конвекции.

Косвенно на этот же эффект указывают эксперименты с жидким гелием [110], который также имеет максимум плотности (при температуре 2,178 К). Поскольку течение жидкого гелия не удается визуализировать, исследовалось поведение теплового потока через слой как функции числа Рэлея. Два излома кривой этой зависимости интерпретировались как переходы от неподвижного

состояния к шестиугольникам и от шестиугольников к валам. В обоих случаях зависимость обнаруживает гистерезис.

**З а м е ч а н и е .** Рассмотренные случаи предпочтительности трехмерных ячеек объединяются общей чертой: в слое имеется ощутимая асимметрия физических свойств относительно средней плоскости  $z = 1/2$ . Если же слой симметричен, то возникают двумерные валы. Это нетрудно понять: переход от некоторой системы валов к ее зеркальному отражению относительно средней плоскости эквивалентен [по крайней мере, в том приближении, которое соответствует низшей гармонике с планформой (2.27)] однородной трансляции всей картины в направлении вектора  $\mathbf{k}$ . Трехмерные ячейки этим свойством не обладают. Неудивительно, что именно валы типичны для тех случаев, когда верхняя и нижняя части слоя неотличимы. А с наличием неоднородности вязкости согласуется существование шестиугольных ячеек  $l$ - и  $g$ -типов: направление циркуляции оказывается таким, что вязкость минимальна в области наибольших скоростей деформации — центральной части ячейки. Можно ожидать, что трехмерные ячейки будут предпочтительны и в следующих двух случаях.

**4.1.4. Асимметрия граничных условий.** В частности, для слоя с жесткой нижней границей  $w$  и свободной верхней было найдено [97], что предпочтительными должны быть ячейки  $l$ -типа. Здесь дело, очевидно, в отсутствии зеркальной симметрии поля скоростей.

**4.1.5. Кривизна невозмущенного профиля температуры,** возможная, например, благодаря внутренним источникам тепла, также облегчает возникновение шестиугольных ячеек [111]. Заметим, что нестационарность нагрева, которая может приводить к появлению шестиугольников (см. ниже), также создает кривизну того температурного профиля, который в этих условиях можно считать невозмущенным.

**4.1.6. Конечная теплопроводность горизонтальных границ.** Возникновение квадратных ячеек может быть обусловлено существенными отклонениями от условий (2.5), которые реализуемы лишь при бесконечной теплопроводности горизонтальных границ слоя.

Если мал параметр  $\zeta$ , равный отношению теплопроводности ограничивающих слой пластин к теплопроводности жидкости, то учет его в процедуре разложения по схеме работы [25] приводит к следующему результату анализа устойчивости различных стационарных решений с  $k - k_c$ , полученному для  $P = \infty$  и бесконечной толщины пластин [112]. Физически реализуемы лишь те решения, которые имеют  $N = 2$  [см. (2.13)] и углы между векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ , лежащие между  $60^\circ$  и  $120^\circ$ . Квадратные ячейки выделены среди них тем, что обеспечивают максимальную теплопередачу. Кроме того, наиболее быстро растущие возмущения неустойчивых валиковых течений стремятся трансформировать валы в систему квадратов. Эти выводы, как показали авторы, не должны существенно измениться при переходе к конечным  $P$  и конечной толщине пластин.

Впоследствии было показано [113], что квадратные ячейки наиболее устойчивы и при конечной амплитуде. На основании того, что горизонтальный масштаб течений при малых  $\zeta$  должен быть много больше толщины слоя, было использовано разложение, аналогичное применяемому в теории "мелкой воды". Толщина граничных пластин предполагалась конечной. Устойчивость течений различных планформ исследовалась с помощью полученного в работе вариационного принципа.

Исследование уравнений эволюции функции планформы (4.3); полученных путем разложения по малым амплитудам (ср. ранее упомянутые работы [91 — 96, 105]), позволило найти [114] критическое значение параметра  $\zeta$ , при котором происходит переход от валов к квадратам. Оно зависит от отношения толщины пластин к толщине жидкого слоя и от  $P$ . При очень малых  $P$  (например, характерных для ртути:  $P = 0,025$ ) критическое  $\zeta$  очень мало и квадраты возможны, лишь если пластины являются практически полными теплоизоляторами. Если  $P$  велико, то квадраты возникают даже при сравнимых теплопроводностях пластин и жидкости.

Наконец, дальнейшее исследование методом работы [25] линейной устойчивости стационарных течений вблизи  $R = R_c$  при  $k = k_c$ , большой толщине граничных пластин и, вообще говоря, различных (не малых) значениях параметра  $\zeta$  для нижней и верхней границ слоя (соответственно  $\zeta_b$  и  $\zeta_t$ ) показало [115], что валы неустойчивы, когда устойчивы квадраты, и наоборот, а все трехмерные решения с  $N > 2$  (в том числе шестиугольники) всегда неустойчивы. Диаграмма устойчивости в пространстве  $(\zeta_t, \zeta_b, P)$  приведена на рис. 7.

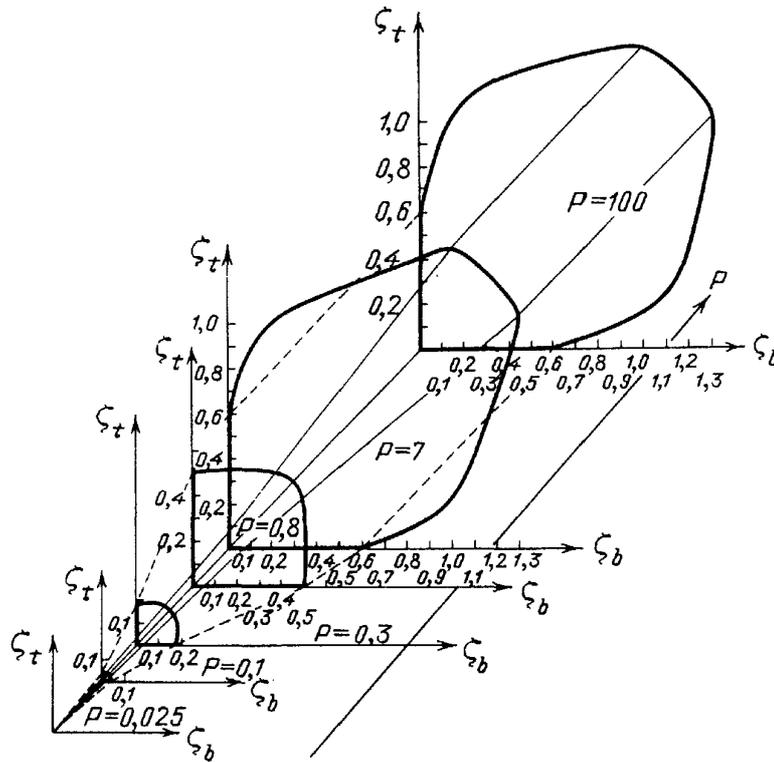


Рис. 7. Диаграмма устойчивости квадратных ячеек и валов в пространстве  $(\zeta_t, \zeta_b, P)$  [115]. Внутри области, очерченной жирной кривой на каждой плоскости  $P = \text{const}$ , устойчивы квадраты, вне области — валы

Квадратные ячейки наблюдались вблизи порога конвективной неустойчивости ( $\epsilon < 0,024$ ) в эксперименте [116] с силиконовым маслом ( $P = 70$ ) при  $\zeta = 7$  (стеклянные пластины). Использовался круглый резервуар с  $\Gamma = 20$ . В области  $0,024 < \epsilon < 0,057$  амплитуды двух взаимно перпендикулярных систем валов испытывали периодические колебания в противофазе друг с другом; при увеличении  $\epsilon$  одна из систем начинала доминировать, пока (при достаточно большом  $\epsilon$ ) не устанавливалась единая стационарная система валов (не считая двух областей вблизи внешней стенки, где структура оставалась более

сложной).

Впоследствии эксперимент был видоизменен [117]: границы слоя были выполнены из плексигласа, а в качестве рабочей жидкости взята вода, так что  $\zeta = 0,4$ ,  $P \approx 7$ . В результате довольно длительного установления возникала система квадратных ячеек, которая, в отличие от предыдущего эксперимента, наблюдалась в широком диапазоне  $\epsilon$  без признаков дестабилизации. Авторы полагают, что в первом случае силиконовое масло вело себя как смесь и наблюдавшаяся картина обусловлена эффектом Сорэ.

Учет конечной теплопроводности границ был выполнен для сравнения теоретических результатов с экспериментом и в уже упоминавшейся работе [105], посвященной исследованию роли зависимости  $\nu(T)$ .

Согласно расчету, подкритическая конвекция в форме квадратов должна наблюдаться при **бóльших**  $\nu_{\max}/\nu_{\min}$ , чем это было в эксперименте [19]. Причина этого расхождения в работе не выявлена.

**4.1.7. Деформация свободной поверхности.** До сих пор везде предполагалось, что границы слоя не деформируются, даже если являются свободными в смысле отсутствия тангенциальных напряжений. Учет деформируемости свободных поверхностей (одной или обеих) дает эффекты того же типа, что и отклонения от приближения Буссинеска [95] (см. выше). Этот вывод получен без учета поверхностного натяжения, но влияние деформации ощутимо лишь в очень тонких слоях, когда существенно и влияние поверхностного натяжения.

Аналогичный результат получен в [32] (см. п. 3.2.2). Авторы нашли следующий критерий значимости эффектов деформации:  $\partial \ln \rho / \partial \ln \mu \sim 1$  ( $\mu$  — динамическая вязкость). Для большинства жидкостей эта производная мала и приближается к 1 в окрестности точки инверсии, где  $\partial \mu / \partial T = 0$ . В частности, для серы инверсия наступает при  $T = 153^\circ\text{C}$ .

**4.1.8. Нестационарность нагрева.** Кришнамурти [118] рассмотрела случай, когда обе поверхности слоя медленно и линейно по времени изменяют свою температуру, так что число Рэлея остается неизменным, а невозмущенный профиль температуры в размерных переменных имеет вид

$$T = \eta t - \frac{\Delta T}{h} z + \frac{\eta}{2\chi} z(z - h), \quad (4.5)$$

где  $\eta = \text{const}$ , а  $\chi$  — теплопроводность жидкости. Выполнив разложение по малым параметрам — амплитуде конвекции и скорости нагрева (охлаждения)  $\eta$  и исследовав устойчивость валов и шестиугольников (как в [25]), Кришнамурти показала, что эффект нестационарного нагрева вполне аналогичен эффекту температурной зависимости физических свойств вещества [97, 98]. В частности, диаграмма устойчивости имеет вид, показанный на рис. 4, если под  $\beta$  понимать параметр  $\eta$ . При нагреве ( $\eta > 0$ ) устойчивыми могут быть шестиугольники  $g$ -типа, а при охлаждении ( $\eta < 0$ ) —  $l$ -типа. В [119] описан эксперимент, в котором шестиугольники действительно наблюдались при нестационарном нагреве, причем направление циркуляции в ячейках соответствовало теории. Аналогичные результаты были получены при численном моделировании трехмерных течений в условиях той же задачи [120], хотя ячейки не выглядели в точности шестиугольными.

Эффект такого же типа может быть обусловлен периодической **временной** модуляцией разности температур нижней и верхней поверхностей слоя. Если эта разность изменяется как  $\Delta T(1 + \delta \cos \omega t)$ , где  $\Delta T$  — ее среднее значение, то разложение уравнений Буссинеска по малой амплитуде течения и малой

амплитуде  $\delta$  модуляции и последующий анализ устойчивости показывает [121], что вблизи порога неустойчивости (включая узкий интервал подкритических  $R$ ) устойчивы шестиугольные ячейки. При достаточно высокой надкритичности становится устойчивым валиковое течение, а при еще **бóльших**  $R$  теряют устойчивость шестиугольники. Ширина интервала значений  $R$ , в котором последние устойчивы, есть  $O(\delta^4)$  и уменьшается с  $\omega$ .

Исследование системы уравнений для амплитуд нескольких низших гармоник галеркинского разложения конвективных возмущений ("обобщенной модели Лоренца") подтвердило [122] качественные выводы работы [121], но привело авторов к заключению, что при малых  $\delta$  шестиугольники не могут наблюдаться, поскольку очень мал интервал их устойчивости и недостижима требуемая точность контроля условий эксперимента. Для наблюдаемости нужны гораздо большие амплитуды модуляции, чем указано в [121].

Теоретически предсказанные следствия периодической модуляции нагрева удалось наблюдать в эксперименте [123]. Были выделены области устойчивости шестиугольников, валов и сосуществования обоих типов течения. Границы областей и направление циркуляции в ячейках согласуются с теорией.

Отметим еще эксперимент, описанный в [40]. Исследовалось поведение конвективного теплового потока через слой жидкого гелия при изменении  $R$  со временем — либо по ступенчатому, либо по линейному закону. Интерпретация данных на основе амплитудных уравнений показала, что конвекция в момент возникновения не была валиковой, а имелся переходный режим, который авторы предположительно связывают с системой шестиугольных ячеек.

**4.1.9. Наличие взвеси**, вообще говоря, может сильно изменить механические свойства жидкости. Для справки заметим, что согласно эксперименту [75], при большой концентрации полидисперсной твердой визуализирующей добавки многоугольные ячейки наблюдаются в тех условиях, когда при малой концентрации возникают валы.

**4.1.10. Вторичные течения.** Валиковая конвекция наблюдается лишь в определенном диапазоне чисел Рэлея (см. гл. 5). За его верхней границей валы неустойчивы, и развивающиеся вторичные течения делают поле скоростей трехмерным.

**4.2. Квазидвумерные валиковые структуры.** Как мы видели, валиковая структура — основной тип стационарной конвекции при отсутствии осложняющих факторов. Рассмотрим свойства таких течений подробнее.

Даже если валиковая структура в натурном эксперименте весьма правильна и свободна от дефектов, валы тем не менее не бывают совершенно прямыми, а течение в них — вполне двумерным. И происходит это уже хотя бы потому, что в реальности течение всегда ограничено боковыми стенками, которые могут оказывать немалое влияние на его структуру.

В рамках линейной задачи об устойчивости неподвижного состояния Дэвис, пользуясь методом Галеркина, показал [124], что наличие боковых стенок снимает вырождение собственных функций: в прямоугольном резервуаре с жесткими горизонтальными и вертикальными границами критическое число Рэлея меньше для тех валов, которые параллельны короткой стороне резервуара. Именно такие валы предсказываются на основании амплитудного уравнения НВЗ [28] и его обобщения для суперпозиции систем взаимно перпендикулярных валов [36]. Вывод о предпочтительности таких валов подтвердился экспериментом [125], который был выполнен при различных отноше-

ниях сторон прямоугольного резервуара и различных аспектных отношениях и показал согласие с [124]. Линейная теория довольно хорошо описывает [126] режимы с различным числом валов, наблюдавшиеся в [125] при разной геометрии полости. В [126] предсказано, что в резервуаре, близком к квадратному, вблизи порога неустойчивости могут возникать системы взаимно перпендикулярных валов.

Для бесконечно длинного канала со свободными горизонтальными границами и жесткими боковыми стенками и с отношением  $A$  высоты к ширине линейная задача дает [127] в качестве предпочтительной моды поперечные к каналу валы, если  $A < 0,1$  или  $A > 1$ . При промежуточных значениях  $A$  в общих чертах картина такая же, но довольно велика поперечная к каналу компонента скорости. Детальное исследование структуры конвекции в канале с жесткими границами методом Галеркина дано в [128].

В конечном, но длинном ( $\Gamma = 18$ ) канале эффект ориентации валов перпендикулярно длинным стенкам экспериментально наблюдался, например, в [129].

Лабораторной моделью бесконечно длинного прямого канала является кольцевой канал между коаксиальными цилиндрическими стенками. Если он не слишком широк, то валы располагаются в радиальном направлении, перпендикулярно стенкам [130].

Обширный экспериментальный материал показал, что указанная ориентация валов — частный случай более общей тенденции: вблизи стенки валы стремятся выстроиться перпендикулярно ей. Эта тенденция особенно заметна (поскольку влияет на форму валов), когда наблюдаются сложные структуры с дефектами (текстуры), а также в круглых резервуарах (рис. 8).

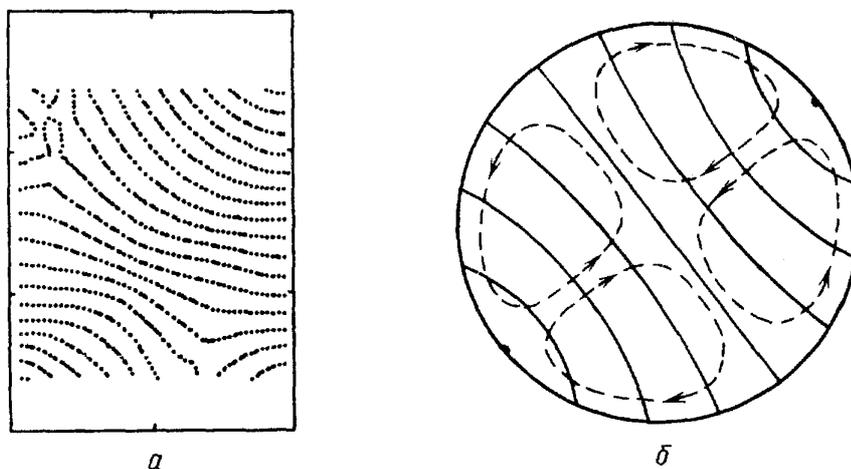


Рис. 8. Экспериментально наблюдавшиеся структуры валиковых течений (изображены границы валов).  $a$  — Текстура в прямоугольном резервуаре,  $R = 4R_c$ ,  $P = 2,5$  [14]; области, прилегающие к коротким стенкам камеры, не видны.  $b$  — Схематическое изображение изогнутых валов в круглом резервуаре,  $R = 1,14R_c$ ,  $P = 0,7$  (по фотографии из [131]); штриховые линии — крупномасштабное течение, полученное в [156]. На обоих рисунках хорошо заметна тенденция валов подходить к боковым стенкам под прямым углом

Пользуясь модельным уравнением СХ, Помо и Залески [43] показали, что в пограничных слоях вблизи боковой стенки система валов, параллельных этой стенке, должна быть неустойчива: разовьется вторичное течение в виде валов, перпендикулярных стенке и исходным валам (поперечно-валиковая неустойчивость; см. раздел 6.3). Этот эффект наблюдался в эксперименте,

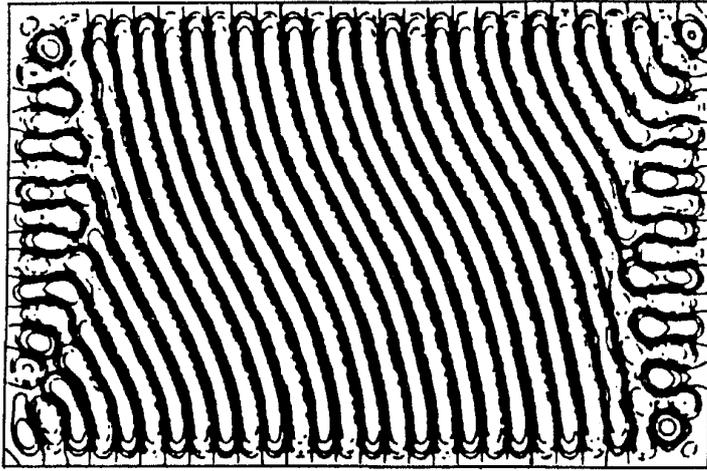


Рис. 9. Валиковые S-образные структуры, полученные при численном моделировании [66]; вблизи коротких границ области развивается поперечно-валиковая неустойчивость. В эксперименте [134] наблюдалась весьма схожая картина

соавторами [133]. Они выполнили численные расчеты функционала Ляпунова для уравнения НВЗ в пограничном слое и получили оптимальное (минимизирующее функционал) значение угла между валами и нормалью к стенке, отличное от нуля и имеющее порядок  $\epsilon^{1/4}$ . Здесь речь идет о значении угла на достаточном удалении от стенки, за пределами пограничного слоя; у самой стенки этот угол равен нулю в соответствии с граничными условиями. Поэтому можно вообразить, что в резервуаре, ширина которого превышает удвоенную толщину пограничного слоя, а длина заметно больше ширины, вали должны изгибаться наподобие буквы S, подходя к длинным боковым стенкам по нормали и будучи наклонены к этой нормали в средней части [133]. Такие S-образные структуры были получены при численном моделировании текстур на основе уравнения СХ Гринсайдом с соавторами [65, 66] (рис. 9) и наблюдались в эксперименте Ле Галем [134] (причем картина выглядела практически точно так же, как на рис. 9). Заметим, что минимизация функционала Ляпунова оптимальным углом в данном случае не означает, что этот угол — единственный реализуемый (см. раздел 6.4). В конечном счете для реализуемости той или иной структуры имеет значение общая геометрия течения, определяемая, в частности, формой и горизонтальными размерами полости и условиями на боковых стенках. Ситуация здесь аналогична вопросу о достижимости оптимального волнового числа системой двумерных валов, о чем речь пойдет в разделе 6.5.

При очень малых надкритичностях угол, образуемый валом с боковой стенкой, может заметно отличаться от прямого. Так, в эксперименте [131] при  $\epsilon = 0,05$  все вали в круглом резервуаре были практически прямыми и параллельными. Возможно, здесь становятся существенными неучтенные факторы, нарушающие идеальные граничные условия (3.20).

Тенденция конвективных валов выстраиваться вблизи боковых стенок перпендикулярно им — сейчас хорошо известный экспериментальный факт. Но здесь необходимо сделать три важные оговорки.

Во-первых, сказанное не относится к тем случаям, когда тепловой режим

например, [132] (в круглом резервуаре) и [18] (в прямоугольном резервуаре — см. п. 6.5.3); см. также рис. 9.

Кросс [46] исследовал влияние боковой стенки с помощью амплитудного уравнения НВЗ с граничными условиями, воспроизводящими (3.20) в низшем порядке. Оказалось, что функционал Ляпунова для систем валов в пограничном слое минимален, когда вали образуют со стенкой угол  $\pi/2$  — с точностью до поправки  $O(\epsilon^{1/4})$ .

Этот результат впоследствии уточнили Залески с

боковых стенок сам навязывает определенный характер течений в пристеночной области. Допустим, например, что температура на стенке все время выше, чем невозмущенная температура в слое на той же высоте (так бывает, когда теплопроводная стенка находится в лучшем тепловом контакте с нижней границей слоя, чем с верхней, или подогревается снаружи). Тогда возле стенки будет существовать устойчивый восходящий поток, и валы в пограничной области будут ориентированы параллельно стенке. Такого рода ситуации пограничного (пристенного) вынуждения будут рассмотрены в п. 6.5.1. Нередко их намеренно создают в эксперименте; см. раздел 6.7.

Понятно, что тепловое воздействие боковых стенок при одинаковых прочих условиях тем меньше, чем ближе теплопроводность их материала к теплопроводности жидкости. Особенно это заметно в условиях нестационарного нагрева [135]: стенки из 5%-ного полиакриламидного геля, очень хорошо согласованные по теплопроводности с рабочей жидкостью — водой, практически не влияли на эволюцию течения, его структура не коррелировала с геометрией резервуара и не повторялась от опыта к опыту (хотя валы подходили к боковой стенке под углами, близкими к прямому); полиэтиленовые же стенки оказывали вынуждающее воздействие на течение, его развитие шло от стенок внутрь полости, а структура отражала геометрию резервуара.

Во-вторых, существенное влияние на валиковую структуру могут оказать даже незначительные неоднородности нагрева снизу и (или) охлаждения сверху. Например, в известных экспериментах [136, 137] осесимметричная система кольцевых валов в круглом резервуаре возникала благодаря наличию радиального градиента температуры в верхнем теплообменнике, поскольку охлаждающая вода поступала в центральную часть теплообменника, а откачивалась вблизи наружного края.

В-третьих, влияние стенок может быть существенно ослаблено, если вдоль этих стенок имеется зона, где слой жидкости не прикрыт сверху твердой крышкой, и его верхняя поверхность является свободной (см. раздел 3.1 и рис. 3). Эта зона играет роль буфера, поскольку в ней развиваются трехмерные течения сложной структуры, которые легко согласуются с валами любой ориентации, возникающими вдали от стенок. Поэтому в экспериментах на таких установках системы параллельных валов бывают направлены под разными углами к стенкам, и их ориентация случайным образом меняется от опыта к опыту [75].

**4.3. Конвективные текстуры.** Конвекция, спонтанно развившаяся из шумовых возмущений, как правило, не образует вполне правильной системы валов: регулярность картины бывает в большей или меньшей степени "подпорчена" разного рода структурными дефектами. Такие усложненные картины, в которых можно выделить несколько упорядоченных фрагментов, называют *текстурами*. Мы увидим, что наличие дефектов обеспечивает системе валов дополнительные "степени свободы": перестройка валов по волновому числу легче всего происходит при наличии подходящих дефектов структуры. Многие наблюдаемые дефекты схожи с дефектами кристаллических решеток, поэтому и терминология, используемая для их описания, заимствована из физики кристаллов. Типичные дефекты валиковых структур схематически показаны на рис. 10.

**4.3.1. Дислокация** (рис. 10,а) представляет собой дефект, возникающий там, где оканчивается "лишняя" пара валов, "вклиненная" в регулярную валиковую структуру (валы которой вблизи дислокации оказываются несколько

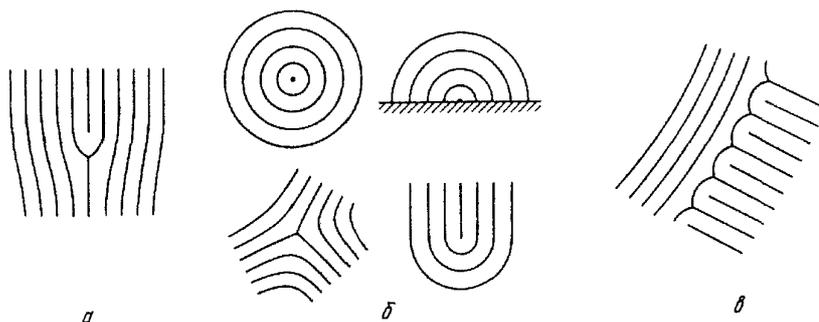


Рис. 10. Дефекты валиковых структур. *а* — Дислокация. *б* — Дисклинации (вверху — сингулярности типа фокуса). *в* — Структурная граница

деформированными). Наблюдаются как стационарные, так и движущиеся дислокации. Их движение чаще всего происходит в направлении, параллельном валам (*переползание* — *climb*), хотя иногда отмечалось и перемещение в перпендикулярном направлении, сопровождаемое топологическими перестройками вблизи дислокации (*скольжение* — *gliding*).

**4.3.2. Дисклинации** — это дефекты, связанные с точечными сингулярностями поля локальных волновых векторов. Типичные дисклинации показаны на рис. 10, б. Особенно часто в работах, исследующих отбор волновых чисел, рассматривается *сингулярность типа фокуса* — дисклинация, возникающая в центре осесимметричной системы кольцевых валов или во фрагментах подобной системы — например, вблизи боковой стенки резервуара. В процессе перестройки конвективной структуры, имеющей фокусы, рождение или исчезновение валов нередко происходит именно в этих точках.

**4.3.3.** Весьма характерным дефектом являются *структурные границы*<sup>(8\*)</sup> — линии, разграничивающие упорядоченные фрагменты текстуры, в пределах которых течение имеет вид правильной системы валов (рис. 10, в). Как выяснится в п. 6.5.3, движение структурных границ может обеспечивать весьма эффективную перестройку валов по волновому числу в широких пределах.

## 5. Смена режимов конвекции

Конвекция проявляет себя в разнообразных формах: ячейки могут иметь различную конфигурацию, складываться в более или менее упорядоченные пространственные структуры, течение либо достигает стационарности, либо испытывает колебания (также различной степени упорядоченности), либо является полностью турбулентным. В первом приближении режим конвекции в горизонтальном слое при стандартных условиях определяется числами  $R$  и  $P$ ; переходы между режимами могут быть представлены в виде диаграммы, показанной на рис. 11. Она суммирует экспериментальные данные Кришнамурти [72, 73, 138] и ряда других авторов, первоначально была построена Кришнамурти и модифицирована Буссе [22, 23]. Линии, разграничивающие области различных режимов, проведены до некоторой степени условно, поскольку результаты разных экспериментов не всегда точно согласуются друг с другом и, кроме того, возможны трудности с определением значений  $R$ , соответствующих переходам, — особенно если при пошаговом изменении  $R$  смена режимов происходит с гистерезисом. Как будет видно из дальнейшего, особенно тонкий вопрос — переход от стационарной конвекции к нестационарной.

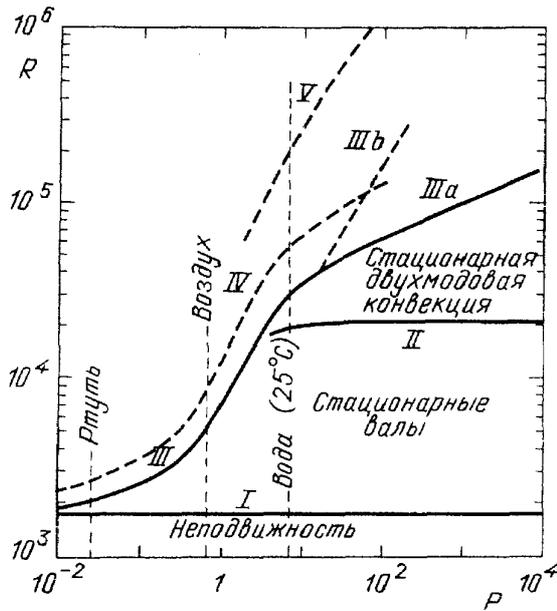


Рис. 11. Диаграмма режимов конвекции (по [72, 73, 138] и другим экспериментальным работам)

Ниже линии  $I(R = R_c)$  располагается область устойчивого неподвижного состояния жидкости. Выше — область стационарной валиковой конвекции, условно говоря, двумерной (см. разделы 4.2 и 4.3). При больших  $R$  она простирается примерно до  $R \approx 13R_c \approx 2 \cdot 10^4$ . Близкая к двумерной, но, вообще говоря, не вполне стационарная конвекция может наблюдаться вплоть до нескольких десятков  $R_c$  (см., например, [139]). Кривая  $II$  — порог, выше которого поперечно-валиковая неустойчивость (см. раздел 6.3) приводит к стационарной двухмодовой конвекции: течение представляет собой суперпозицию основных валов и перпендикулярных им вторичных валов меньшей ширины и меньшего, чем полная толщина слоя, вертикального размера. Интересно, что при

очень больших  $P (= 8,6 \cdot 10^3)$  искусственно индуцированная двухмодовая конвекция (в том числе ее предельная форма — квадратные ячейки) может быть устойчива даже при  $R \approx (2 - 8) \cdot 10^5$  и притом неустойчива при  $R \approx 10^5$  [140].

Переход к двухмодовому течению наблюдается лишь при достаточно больших  $P$ . При малых же  $P$  сразу происходит переход к нестационарной конвекции (кривая  $III$ ), связанный с колебательной неустойчивостью: наблюдаются бегущие вдоль валов волнообразные изгибы. (Впрочем, как теперь стало понятно, последняя фраза относится скорее к теоретическим предсказаниям, сделанным для идеализированных моделей — см. раздел 6.3. Из дальнейшего будет видно, что при небольших  $P$  указать универсальные пороговые значения  $R$  для смены режимов в разнообразных экспериментальных установках невозможно.) Двухмодовая конвекция при некотором  $R$  также становится нестационарной, причем согласно Кришнамурти в области  $P \geq 50$  это значение  $R$  почти постоянно и равно  $5,5 \cdot 10^4$ , а более поздние эксперименты [17, 141, 140] дают значения, растущие с  $P$  (см. рис. 11). Расщепление кривой  $III$  на две ветви связано с тем, что возникновение колебаний сильно зависит от наличия неоднородностей картины. Неоднородности могут породить колебания в изолированных участках при относительно малых  $R$  (ветвь  $IIIa$ ), а весьма однородная картина двухмодовой конвекции (создаваемая в эксперименте искусственно) демонстрирует переход к нестационарности при гораздо больших  $R$  (ветвь  $IIIb$ ) [17]. Для конвекции при  $R \sim 10^5 - 10^7$  и умеренных  $P$  характерно существование резко нестационарных мелкомасштабных элементов на фоне относительно неподвижных крупномасштабных ячеек (спицевидная конвекция [17]; см. п. 6.3.1). Кривая  $IV$  соответствует появлению высших гармоник в спектре колебаний (и, как и другие переходы, изменению производной теплового потока по  $R$ ). Для нее справедливо сделанное выше замечание об особенностях смены режимов при малых  $P$ . Над кривой  $V$  — область полностью турбулентной конвекции.

В самых основных качественных чертах диаграмму режимов воспроизвели путем численного моделирования конвекции Вельтищев и Желнин [142].

Важное свойство конвекции, активно изучаемое несколько более десятилетия, непредставимое на такого рода диаграммах, состоит в том, что достижимость стационарного режима при малых и умеренных надкритичностях и небольших  $P$  зависит от аспектного отношения и даже от формы резервуара.

Алерс и Берингер [143, 144] (см. также обзор [145]) выполнили эксперименты с нормальным (не сверхтекучим) жидким гелием-4 в круглых резервуарах с различными аспектными отношениями, изучая поведение разности температур  $\Delta T$  во времени при заданном потоке тепла через слой. При  $\Gamma = 57$ ,  $P \approx 3 - 4$ , начиная с  $R$ , практически совпадающих с  $R_c$ , были обнаружены непериодические колебания с очень широким спектром, максимум которого лежит на нулевой частоте (под  $R$  здесь понимается число Рэлея, соответствующее среднему значению  $\Delta T$ ). В то же время при  $\Gamma \approx 2 - 5$ ,  $P \approx 0,8$  имеется интервал  $R$  шириной до нескольких  $R_c$ , в котором устанавливается стационарная конвекция; выше по  $R$  она либо сразу сменяется нерегулярными колебаниями (при **больших**  $\Gamma$ ), либо им предшествуют периодические и квазипериодические колебания (при меньших  $\Gamma$ ). Аналогичные опыты, ограниченные небольшими  $\Gamma$ , описаны в [146, 147]. Эти исследования проводились также на ртути [148].

Дальнейшие эксперименты с жидким гелием, выполненные в круглых резервуарах с различными  $\Gamma$  ( $2,4 \leq \Gamma \leq 22$ ) при  $0,5 \lesssim P \lesssim 0,7$  [149], продемонстрировали стационарные режимы даже при **больших**  $\Gamma$ , правда, при  $\Gamma \gtrsim 15$  — в очень узком интервале  $R$ :  $R_c \leq R \leq 1,09R_c$ . Кроме того, режим, непосредственно следующий за стационарным, при  $\Gamma \gtrsim 4$  всегда оказывается периодическим (хотя, вообще говоря, далеким от гармонических колебаний). Возможно, что в опытах при  $\Gamma = 57$  это режим не был достигнут из-за очень большого времени его установления.

Примечательно, что эксперименты на жидком гелии в прямоугольных резервуарах с горизонтальными размерами  $13,4h \times 5,95h$  и  $18,2h \times 8,12h$  показывают наступление нестационарности при заметно **больших** надкритичностях — соответственно  $3,39R_c$  и  $2,53R_c$  [150].

Низкочастотный шум, обнаруженный в поведении  $\Delta T(t)$  при малых надкритичностях, стали связывать с особым рода турбулентностью. Одно из ее названий — *турбулентность у порога [конвективной неустойчивости]*. Криогенные эксперименты не позволяют визуализировать течения. Дальнейшие опыты на других жидкостях с визуализацией показали, что турбулентность эта выглядит как медленное движение валов и дефектов валиковой структуры. Поскольку такие процессы нередко пытаются описать пространственно-временными изменениями фазы системы валов, явление нередко называют (*слабой, низкочастотной*) *пространственной, или фазовой турбулентностью*.

Именно с целью изучения поведения пространственной структуры конвекции — как при выходе на стационарные режимы, так и при наличии фазовой турбулентности — была предпринята экспериментальная работа [14], где рабочей жидкостью служила вода вблизи  $70^\circ\text{C}$ : она имеет  $P = 2,5$ , что лежит в диапазоне значений  $P$  для жидкого гелия. Использовался прямоугольный резервуар, имеющий в плане размеры  $20h \times 30h$ . Выяснилось, что при  $R < 5R_c$  эволюция к стационарному состоянию выглядит как постепенное устранение дефектов и переход к сравнительно простой картине плавно изгибающихся валов, которые вблизи боковых стенок направлены перпендику-

лярно им (рис. 8,а). Процесс этот может тянуться сотни часов, что на четыре порядка превышает  $\tau_v$  и на порядок —  $\tau_h$ . И тем не менее, этого не всегда достаточно для достижения стационарного режима. (Заметим, что по оценке [53] время таких процессов установления  $\geq \Gamma\tau_h$ .) Начиная с  $R \approx 5R_c$ , появляются заметно более быстрые процессы, установления не происходит, и непрерывная запись скорости течения в фиксированной точке дает картину широкополосного шума с главным спектральным максимумом на нулевой частоте. В пространственной картине возникают, движутся, взаимодействуют и исчезают дефекты. Характерной чертой являются перетяжки валов. При  $R \geq 9R_c$  в спектре имеется еще один пик — вблизи 0,05 Гц, который связан с колебаниями валов.

Различные режимы конвекции изучались также в [151]. Использовались та же рабочая жидкость и круглый резервуар с  $\Gamma = 14$ . Автоматическая обработка теневых изображений позволила детально исследовать поля локальных волновых векторов  $\mathbf{k}(\mathbf{x})$  и функции распределения волновых чисел  $f(k)$ . В зависимости от относительной надкритичности  $\epsilon$  было выявлено три типа режимов. Если  $\epsilon < 0,2$ , то по крайней мере в течение  $50\tau_h$  наблюдается непериодическое движение, связанное с перестройками дефектов. При  $0,2 < \epsilon < 3,5$  по истечении достаточного времени формируются стационарные текстуры. При  $\epsilon > 3,5$  течение вновь оказывается нестационарным — время от времени перетяжки валов порождают новые эволюционирующие дефекты. Интересно, что в первом и третьем случаях, когда установления не происходит, распределение  $f(k)$  выходит за пределы той полосы волновых чисел, в которой, согласно теории (см. п. 6.3.1), однородные пространственно-периодические валиковые течения должны быть устойчивы (рис. 12). Что касается режимов с очень малыми  $\epsilon$ , то авторы не исключают возможности, что нестационарность обусловлена случайными внешними воздействиями и неидеальностью поддержания условий опыта. В квадратном резервуаре со стороной, равной диаметру круглого, они наблюдали установление за время  $100\tau_h$ . С другой стороны, эксперимент в круглом резервуаре при  $\epsilon = 0,141$ ,  $P = 5,7$ ,  $\Gamma = 15$  [152], длившийся порядка  $200\tau_h$  (около месяца), установления не обнаружил.

Опыты с аргоном при комнатной температуре ( $P = 0,7$ ) в круглой полости с  $\Gamma = 7,66$  [131, 153] также продемонстрировали топологические изменения валиковой структуры при нестационарной конвекции и, кроме того, выявили весьма сложный характер смены режимов. При  $\epsilon < 0,126$  наблюдались стационарные картины слегка изогнутых валов с двумя сингулярностями типа фокуса (см. рис. 8,б). При **больших**  $\epsilon$  течение нестационарно. Временами в центральной части возникает перетяжка какого-либо из валов, порождающая две дислокации, которые, расходясь, переползают к боковым стенкам, а затем скользят к фокусам и исчезают. В фокусах генерируются новые валы, и картина восстанавливается. Процесс при  $0,126 < \epsilon < 0,175$  периодичен, причем в этом интервале в зависимости от  $\epsilon$  могут наблюдаться пять сценариев поведения дефектов, в общих чертах следующих описанной схеме. При  $0,175 < \epsilon < 0,346$  возникают топологически разнообразные структуры, поведение их хаотично — наблюдается фазовая турбулентность.

В стационарных режимах локальные волновые числа заполняют некоторый интервал значений (максимум — в центре сосуда, минимум — вблизи внешней стенки), который расширяется с ростом  $\epsilon$ . Интересно, что верхняя

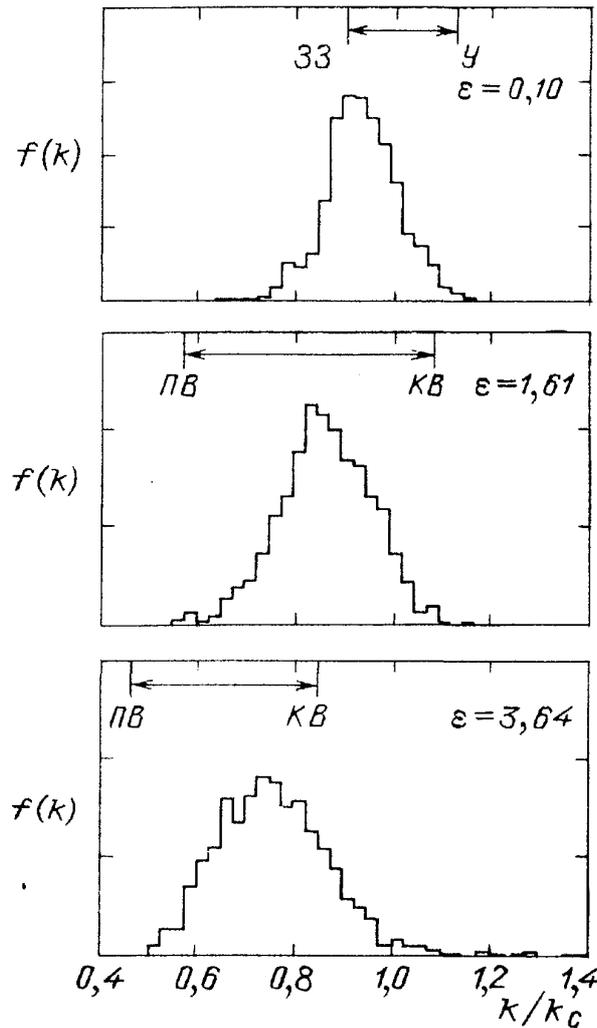


Рис. 12. Функции распределения локальных волновых чисел при различных  $\varepsilon$  (эксперимент;  $P = 2,5$  [151]). Обозначены интервалы волновых чисел, в которых однородные валиковые структуры устойчивы по линейной теории, и обозначены типы неустойчивостей, возникающих на границах этих интервалов (см. п. 6.3.1)

граница этого интервала достигает теоретического порога неустойчивости, найденного для однородных систем валов (см. п. 6.3.1), как раз вблизи того  $\varepsilon$ , при котором происходит смена стационарных режимов нестационарными — здесь перекликаются результаты [131, 153] и [151].

В области  $0,346 \leq \varepsilon \leq 1$  имеется еще четыре перехода [153]: хаотическая эволюция при увеличении  $\varepsilon$  вновь сменяется стационарным течением, затем наблюдается периодический процесс, далее опять стационарный и снова хаотический.

Время установления в этих экспериментах достигало  $500\tau_H$ .

В уже упоминавшихся опытах [150], когда жидкий гелий заполнял **большую** по размерам прямоугольную камеру, также наблюдалась "тонкая структура" в распределении по  $\varepsilon$  стационарных, периодических и аperiodических режимов.

Эксперименты с воздухом [154] показали, что если отношение горизонтальных размеров прямоугольной полости лежит в пределах от 0,5 до 1, то возможна фазовая турбулентность, связанная со скольжением дислокаций. Этот процесс возникает при значениях  $R$ , примерно соответствующих порогу

косовариантной неустойчивости (см. п. 6.3.1), которая играет важную роль в хаотизации картины.

Естественно предположить, что наблюдавшаяся во многих случаях при малых и умеренных  $P$  замысловатая и явно невариационная динамика связана с наличием крупномасштабного потока (см. п. 3.2.2). Манвиль [155] попытался численно смоделировать фазовую турбулентность в прямоугольном резервуаре с горизонтальными размерами  $15,9h \times 11,5h$ , исходя из уравнений (3.21) — (3.23), которые учитывают постоянный по  $z$  средний дрейф (что соответствует свободным горизонтальным границам слоя). В его расчетах стационарное состояние достигалось, но, если  $P$  было достаточно малым ( $= 1,6$ ), наблюдался длительный процесс установления, который можно истолковать как переходный к турбулентности. Средний поток создает локальные сжатия валиковой структуры, появляются перетяжки, которые порождают дислокации, те переползают, валы деформируются — эта последовательность событий напоминает экспериментально наблюдаемую и может повторяться многократно. Важной чертой процесса является, по мнению автора, несогласованность среднего потока (структура которого зависит от общей геометрии течения, в частности, от формы и размеров области течения) с локальной кривизной валов (и, следовательно, со скоростью фазовой диффузии). Несбалансированность фазовой диффузии и переноса валов средним потоком приводит к "динамической ломке" (frustration) — топологическим изменениям — валиковой структуры и, в конечном счете, к нерелаксационности динамики.

Большое сходство с поведением дефектов в эксперименте [131, 153] получено при численном моделировании течений в круглой полости [47] на основе модели (3.28), (3.30) — (3.34) с  $a = b = 0$ ,  $c = 1$ . Хаотические режимы были выявлены в расчетах как для круговой, так и для прямоугольной области.

Пошо [156] сконструировал явное аналитическое решение уравнений КН (3.60) — (3.62) для поля фазы и среднего потока в круговой области, пользуясь разложением по малому параметру, связанному с кривизной валов. При этом для  $P = 0,7$  были воспроизведены стационарная картина искривленных валов и потеря ею устойчивости при той надкритичности, когда наибольшее локальное волновое число выходит за пределы полосы устойчивости для прямых валов. Это происходит, когда становится достаточно интенсивным средний поток, направленный в области наибольшей кривизны валов (у боковых стенок) к фокусам, а от фокусов — к центру резервуара (рис. 8,б). При этом в центральной части валы заметно сжимаются.

В дальнейшем [157] была показана и экспериментально, и теоретически — путем решения уравнений КН — возможность стабилизации течения благодаря пронизываемым для среднего потока боковым стенкам полости. Если окружить круглый резервуар кольцевой областью, где есть крупномасштабный поток, но нет конвекции, то средний поток, распределенный на **большую площадь**, уже не будет так сильно поджимать валы в центре резервуара. В результате недостижимость стационарных режимов наступает лишь при  $\epsilon = 1,2$ , а фазовая турбулентность обнаруживается лишь при  $\epsilon = 1,5$ . В эксперименте конвекция во внешней кольцевой области подавлялась тонкой горизонтальной кольцевой пластинкой, которая делила слой на два конвективно-устойчивых подслоя.

Подведем итог. Для случаев малых и умеренных  $P$  нельзя универсальным образом указать характер конвекции, исходя из одних лишь чисел  $R$  и  $P$ , и соответствующая часть диаграммы на рис. 11 иллюстрирует смену режимов лишь в самых грубых чертах. Детальное описание должно быть весьма кон-

кретным — для резервуара данных размеров и формы.

То обстоятельство, что устойчивость конвекции зависит от общей геометрии течения, будет видно и из обсуждения вопроса о волновых числах конвективных валов (раздел 6.5). Турбулентность у порога связана с движением дефектов. От наличия дефектов зависит и перестраиваемость течения, возможность достижения оптимального волнового числа.

## 6. Отбор волновых чисел конвективных валов

Даже если постановка задачи или условия предполагаемого эксперимента и позволяют сделать предсказания относительно платформы конвективных ячеек, то остается тем не менее открытым вопрос о масштабе реализуемого течения, который можно характеризовать шириной вала, радиусом многоугольной ячейки и т.д. В литературе об этом предмете исследования говорят как об *отборе* волновых чисел (или длин волн).

Обсудим здесь эту проблему применительно к самому простому случаю — когда основной формой конвективного течения являются валы. Даже в таком варианте проблема далеко не решена, хотя в последнее десятилетие ей было посвящено много работ. Разнородные, иногда на первый взгляд противоречивые результаты привели отчасти к утрате содержательности самим термином "отбор волновых чисел".

Как правило, спонтанно развившаяся валиковая конвекция демонстрирует некоторое распределение  $f(k)$  локальных значений волнового числа, имеющее более или менее широкий пик при некотором значении  $k$  ([75, 151] и др.), что свидетельствует о наличии выделенного оптимального масштаба (см. рис. 12). Выражение "отбор масштабов" ассоциируется именно с такой выделенностью.

Но, как будет видно из приведенных далее примеров, эта выделенность может проявлять себя в разной степени. В частности, возможны случаи, когда функция  $f(k)$  напоминает  $\delta$ -функцию и, по сути дела, имеется единственное волновое число. Будем называть его *окончательным* (имея в виду итог временной эволюции) или *реализованным*. Поскольку его выделенность выглядит как совершенно однозначная, появляется соблазн говорить об отборе именно на материале таких ситуаций, называть их "механизмами отбора", а реализованное волновое число — "отобраным".

С другой стороны, как мы увидим, даже при одних и тех же параметрах режима  $R$  и  $P$  реализованное единственное значение  $k$  зависит от предыстории течения (в конечном счете — от начальных условий), не говоря уже о многих других факторах, которые в простейших случаях сводятся к граничным условиям. Расхождение между волновыми числами, достигаемыми в разных случаях, часто рассматривается как основание для утверждения, что не существует не только универсального принципа отбора волновых чисел, но и вообще какого-либо единственного (при данных  $R$  и  $P$ ) выделенного пространственного масштаба. И возникает сомнение: разумно ли именовать отбором (или механизмом отбора) всякий акт реализации течения с определенным волновым числом, если "выделенность" этого числа ограничивается, возможно, только данным случаем?

Будем придерживаться некоторой общей точки зрения, позволяющей представить имеющиеся результаты в виде целостной непротиворечивой картины явлений.

Примем в качестве исходного положения, что существует *оптимальное*

(предпочтительное) волновое число  $k_p = k_p(R, P)$ , которое является внутренней характеристикой валиковой конвекции в бесконечном горизонтальном слое и к которому стремятся привести течение определенные динамические селективные факторы. Эта тенденция (которую и будем называть *отбором*) может быть в большей или меньшей степени подавлена другими (*противоселективными*) факторами, связанными с общей геометрией течения, в частности, со степенью его упорядоченности в начальный момент, наличием боковых стенок, и т.д. В результате процесс отбора останавливается на том или ином этапе эволюции от начального состояния и конечное (реализованное) волновое число может в большей или меньшей степени отличаться от предпочтительного. Искусственно внесенная упорядоченность способна придать течению большую устойчивость к действию селективных факторов — в результате разность реализованного и предпочтительного волновых чисел может быть велика. При развитии конвекции из шумовых начальных возмущений таких мощных противоселективных факторов обычно нет, и пик распределения  $f(k)$  соответствует  $k$ .

**6.1. Волновые числа в экспериментах со случайными начальными возмущениями.** Мы видели, что при достаточно больших  $P$  стационарная валиковая конвекция наблюдается вплоть до  $R \approx 10R_c$ . Не вполне стационарные валиковые течения могут наблюдаться и при больших надкритичностях (например, в [139] даже при  $P = 2,5$  течение было в основном двумерным до  $40R_c$ ). В довольно широком диапазоне параметров течения с фазовой турбулентностью являются квазистационарными по отношению к характерному времени обращения жидкости в валах. Дефекты лишь локально нарушают двумерность. Чем больше  $R$ , тем больше естественный разброс значений локальных волновых чисел, измеряемый шириной максимума распределения  $f(k)$ ; см. рис. 12.

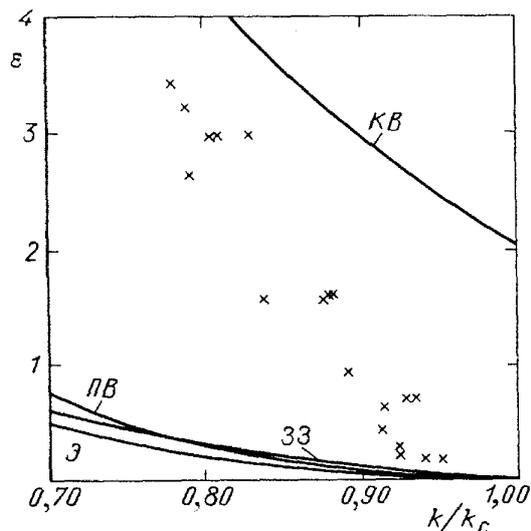


Рис. 13. Средние значения волнового числа стационарных валиковых структур при различных  $\varepsilon$  (эксперимент;  $P = 2,5$  [151]). Показаны пороговые кривые для различных типов неустойчивости (см. п. 6.3.1)

В многочисленных экспериментах выявлена общая закономерность поведения среднего волнового числа валиковой конвекции. (Не делая здесь различия между этим средним  $k$  и близким к нему положением максимума  $f(k)$ , будем называть то и другое *наблюдаемым предпочтительным волновым числом  $k_p$* .) Такое  $k_p$  убывает с ростом  $R$  ([72, 74, 75, 139, 15, 131, 151] и др.), причем это относится и к тем экспериментам, где наблюдались кольцевые осесимметричные валы [158, 137] (см. также обзор [159]). Пример такого поведения  $k_p$  приведен на рис. 13. Эксперименты, где изучались разные жидкости в сходных условиях, показали, что  $k_p$  меняется с  $R$  тем меньше, чем больше  $P$ , причем при достаточно больших  $P$  зависимость  $k_p(R)$  обнаруживает гистере-

зис [72, 74]. В работе [139] ( $P = 2,5$ ) отмечено, что  $k_p$  было почти постоянным в диапазоне  $6 \leq \varepsilon \leq 40$  (при больших  $R$  утрачивалась двумерность).

В течение длительного времени попытки теоретического описания поведения волновых чисел конвекции в бесконечном слое приводили к результату, противоречащему эксперименту:  $k$  увеличивалось с  $R$ . Это относится и к тому  $k$ , при котором максимальна теплопередача через слой (и которое должно реализовываться согласно так называемому принципу Малкуса), и к тем  $k$ , которые соответствуют экстремумам некоторых других характеристик — см. раздел 6.2. Тот же эффект был получен и при двумерном численном моделировании [63]. Относительное согласие с экспериментом было достигнуто в рамках трехмерной модели. Поэтому авторы сделали вывод, что чисто двумерные процессы не могут привести к достижению предпочтительного волнового числа. По их мнению, стационарное двумерное течение формируется после трехмерного переходного процесса, который влияет на окончательное волновое число. Высказывались также соображения, что убывание  $k_p$  с  $R$  есть результат действия побочных факторов — присутствия боковых стенок (в ограниченном объеме условие максимума теплопередачи дает качественно верное поведение  $k$  [160]; дальнейшее обсуждение роли боковых стенок см. в п. 6.5.1) или неидеальной теплопроводности пластин, ограничивающих слой сверху (согласно [161], в этом случае уменьшается  $k_c$ ; однако эксперименты с очень хорошо проводящими пластинами дали тем не менее уменьшение  $k_p$  с  $R$  [158]).

Вопрос о факторах, влияющих на волновые числа двумерных валов, будет подробно обсужден в последующих разделах. Пока заметим лишь, что убывание  $k$  с  $R$  может быть получено в чисто двумерном численном эксперименте, моделирующем условия бесконечного слоя при идеальной теплопроводности границ, если снять обычное в практике численного моделирования условие пространственной периодичности течения ([162, 60]; см. п. 6.5.2).

**6.2. Поиски универсальных критериев отбора.** Сама по себе идея существования предпочтительных форм и масштабов конвекции возникла давно. Начиная, по-видимому, с работы Малкуса [163], ведутся поиски общего принципа, позволяющего выделить такие форму и масштаб. Имеет смысл подытожить то, что было предпринято для реализации этой идеи, которую в последнее время часто незаслуженно критикуют.

Принцип Малкуса был выдвинут на интуитивной основе. Согласно ему, должны реализовываться те течения, при которых конвективная теплопередача максимальна. В дальнейшем была сделана попытка [21] связать этот принцип с устойчивостью стационарных решений уравнений.

Однако на сей день отмечено много случаев, когда предсказания, сделанные исходя из принципа Малкуса, противоречат эксперименту или аккуратным теоретическим исследованиям устойчивости. Прежде всего, для двумерных валиковых течений волновое число, максимизирующее теплоперенос, растет с  $R$  (см., например, [164, 23]), тогда как в экспериментах выявлена обратная закономерность. (Правда, Дэвис [160] указал, что в ограниченном резервуаре, в отличие от бесконечного слоя, волновое число, выбранное по принципу Малкуса, все же должно убывать с  $R$ ; в разделе 6.5 мы увидим, что уменьшение  $k$  с  $R$  не обязано быть эффектом боковых стенок.) О том, что реализуемость течения прямо не связана с условием максимума теплопередачи, говорят численные эксперименты [165]. Далее, из ячеек нескольких

возможных планформ наибольший теплоперенос обеспечивают квадратные [21, 103], которые в условиях стандартной задачи неустойчивы. Движение дислокаций в эксперименте демонстрирует такие изменения волнового числа, при которых теплопередача уменьшается [166]. Наконец, при нелинейной зависимости  $\rho(T)$  имеется интервал чисел Рэлея, в котором валы неустойчивы, но переносят больше тепла, чем устойчивые шестиугольники [94, 22].

Буссе [98] сформулировал экстремальный принцип, по которому при малых надкритичностях среди стационарных решений с различными планформами и фиксированным  $k = k_c$  устойчивы те, которые минимизируют некоторый функционал. При определенных условиях этот принцип эквивалентен принципу Малкуса, а также требованию максимума кинетической энергии конвекции. (Однако при таком подходе предпочтительное волновое число не выявляется.)

Максимум кинетической энергии, вообще говоря, так же не согласуется со значениями наблюдаемых  $k_p$ , как и максимум теплопередачи [23]. То же самое относится к максимуму уменьшения потенциальной энергии в слое конвектирующей жидкости по сравнению со статическим значением [23], максимуму инкремента нарастания возмущений, находимому из линейной теории [10], и к ряду других характеристик конвекции [167]. Автор последней работы пришел к заключению, что гораздо лучший результат дает зависимость от  $k$  детерминанта второй вариации среднего квадрата временной производной средней температуры. Детерминант находится в результате решения так называемых уравнений среднего поля. Заметим, что процедура решения не бесспорна.

Термодинамический подход, основанный на применении принципа максимума производства энтропии [168], позволяет исследовать устойчивость в конкретных ситуациях. Получаемый в результате критерий устойчивости сам по себе не выделяет единственное предпочтительное волновое число в пределах некоторого интервала устойчивости (см. раздел 6.3). Но функционал устойчивости  $\phi$  имеет в этом интервале единственный максимум, который смещается в сторону меньших  $k$  с ростом  $R$  [167]. Однако это смещение происходит гораздо быстрее, чем смещение экспериментально наблюдаемого  $k_p$ . В работе [167] из общих соображений в качестве критерия отбора предложено требование

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} [\phi]_{k=k_p(R)} = 0. \quad (6.1)$$

Вместе с уравнением для  $\phi$  оно определяет зависимость  $k_p(R)$ , если заданы начальные условия — значения  $k_p$  и  $dk_p/dR$  при  $R = R_c$ . Понятно, что  $k_p(R_c) = k_c$ . Для определения  $k'_p(R_c)$  автор использует экспериментальные данные. Полученные зависимости удовлетворительно согласуются с теми конкретными экспериментами, для которых найдены соответствующие  $k'_p(R_c)$ .

В разделе 6.4 и последующих будет обсуждена возможность нахождения предпочтительного волнового числа с помощью функционала Ляпунова для уравнений, описывающих конвекцию.

**6.3. Устойчивость двумерных валиковых течений.** Как было отмечено во Введении, распространенный подход к проблеме отбора связан с исследованием устойчивости стационарных течений. Наибольшее вни-

мание было уделено вопросу устойчивости двумерных пространственно-периодических систем валов.

**6.3.1. Теоретические результаты.** Начало этому направлению положила работа Шлютера, Лорца и Б'уссе [25] (см. п. 3.2.1 и раздел 4.1), основанная на разложении невозмущенного течения по малым амплитудам (надкритичности) и исследовании получаемых решений на устойчивость относительно малых возмущений в линейном приближении. Авторы показали, что все трехмерные течения неустойчивы (речь идет о стандартной постановке задачи). Для двумерных же течений было найдено, что, независимо от величины  $P$  и граничных условий на горизонтальных поверхностях, валы с  $k < k_c$  неустойчивы, а устойчивость имеет место в некотором интервале  $k_c < k < k_1(\epsilon)$ . Опубликованные впоследствии диаграммы устойчивости (см. ниже рис. 15) согласуются с выводом для  $k < k_c$  лишь при  $P = \infty$ . Причина этого расхождения стала понятна после выяснения роли вертикальной компоненты завихренности при конечных  $P$  в работах [33, 34] (см. ниже). В [25] эта компонента была исключена введенными там предположениями о структуре течения, а в более поздних работах она учитывалась.

Детальное изучение линейной устойчивости валиковых течений, охватывающее большие диапазоны надкритичности, было выполнено в серии работ Б'уссе с соавторами [164, 169—176]. Стационарное невозмущенное пространственно-периодическое течение рассчитывалось по полным нелинейным уравнениям (2.9) — (2.11) методом Галеркина и имело вид

$$v_z = \sum_{\lambda, \nu} A_{\lambda, \nu} \varphi_{\nu}(z) \cos \lambda k x \quad (6.2)$$

(с соответствующими выражениями для  $v_x$  и  $\theta$ ). Здесь  $\varphi_{\nu}(z)$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) — функции некоторой полной ортонормированной системы, удовлетворяющие граничным условиям для  $v_z$ . На это двумерное течение накладывались малые трехмерные возмущения вида

$$v'_z = \left[ \sum_{\lambda, \nu} (B_{\lambda, \nu} \cos \lambda k x + C_{\lambda, \nu} \sin \lambda k x) \varphi_{\nu}(z) \right] e^{i a x + i b y + \sigma t} \quad (6.3)$$

(при соответствующих выражениях для  $v'_x$ ,  $v'_y$  и  $\theta'$ ). Линеаризация исходных уравнений относительно возмущений приводит к задаче на собственные значения инкремента  $\sigma$ . Подробное описание техники исследования дано в [170].

Некоторые характерные моды неустойчивости валов ранее уже упоминались. Представления о них понадобятся и в дальнейшем. Имеет смысл перечислить их с указанием диапазона чисел Прандтля, в котором они могут себя проявлять (сейчас речь идет о слое с жесткими границами; более детальная сводка свойств этих мод приведена в [173]).

1) *Зигзаговая* (ЗЗ):  $a = 0$ ,  $\lambda + \nu$  четно,  $B_{\lambda, \nu} = 0$ ,  $P \geq 2$ . Приводит к синусоидальному изгибу валов.

2) *Поперечно-валиковая* (ПВ):  $a = 0$ ,  $\lambda + \nu$  нечетно,  $C_{\lambda, \nu} = 0$ ,  $P \geq 1,1$ . Формирует систему валов, перпендикулярных изначальным.

3) *Косоварикозная* (КВ):  $a/b$  конечно,  $\lambda + \nu$  четно,  $P \leq 30$ . Вызываемая ею деформация валов схематически показана на рис. 14.

4) *Узелковая* (У): дополнительная ветвь ПВ неустойчивости с максимумом  $\sigma$  при относительно малых  $b$ ;  $1,1 \leq P \leq 10$ .

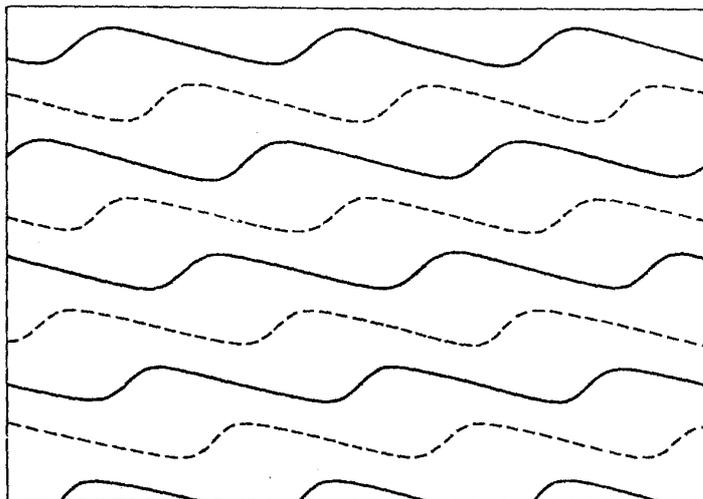


Рис. 14. Деформация валов в результате косоварикозной неустойчивости (сплошные и штриховые линии соответствуют границам валов, вдоль которых происходят восходящие и нисходящие движения)

5) *Экхауза* (Э):  $b = 0$ ,  $\lambda + \nu$  четно,  $C_{\lambda\nu} = 0$ ,  $P \leq 1$ .

Это единственная мода, не нарушающая двумерности течения; приводит к чередующимся по  $x$  сжатиям и расширениям групп валов.

6) (*Четная*) *колебательная* (К):  $a = 0$ ,  $\lambda + \nu$  четно,  $B_{\lambda\nu} = 0$ ,  $P \leq 2,5$ . Соответствует синусоидальным волнообразным возмущениям, бегущим вдоль валов

7) (*Колебательная*) *двухпятенная* — *two-blob instability* (K2):  $a = 0$ ,  $\lambda + \nu$  нечетно,  $C_{\lambda\nu} = 0$ ,  $2 \leq P \leq 8$ . В поперечном сечении вала имеются два пятна повышенной температуры, расположенные в диаметрально противоположных частях сечения, и два — пониженной, расположенные аналогичным образом.

8) (*Колебательная*) *однопятенная* — *one-blob instability* (K1):  $a = 0$ ,  $\lambda + \nu$  четно,  $C_{\lambda\nu} = 0$ ,  $7 \leq P \leq 12$ . В поперечном сечении вала имеется одно пятно повышенной температуры и одно — пониженной. Они расположены в диаметрально противоположных частях сечения.

Сводка некоторых результатов исследования устойчивости для случая жестких границ представлена на рис. 15. Для каждого выбранного значения числа Прандтля в плоскости  $(k, R)$  построены кривые, каждая из которых соответствует порогу неустойчивости ( $\text{Re } \sigma = 0$ ) определенной моды; отмечена ограниченная такими кривыми область устойчивых течений (где все  $\text{Re } \sigma < 0$ ), иногда называемая "*баллоном Буссе*".

Основными видами неустойчивости при больших  $P$  и существенными при умеренных являются 33, которая приводит к эффективному уменьшению характерного масштаба течения и ставит таким образом длинноволновую границу области устойчивости, и ПВ, которая может как увеличивать, так и уменьшать характерный масштаб [164, 172]. В области умеренных  $R$ , согласно экспериментальным данным [111] (см. ниже), развитие ПВ неустойчивости приводит к замене исходных валов новыми, ориентированными в поперечном направлении. Если же  $R \geq 10R_c$ , поперечные валы развиваются главным образом в температурных пограничных слоях, создаваемых основным течением,

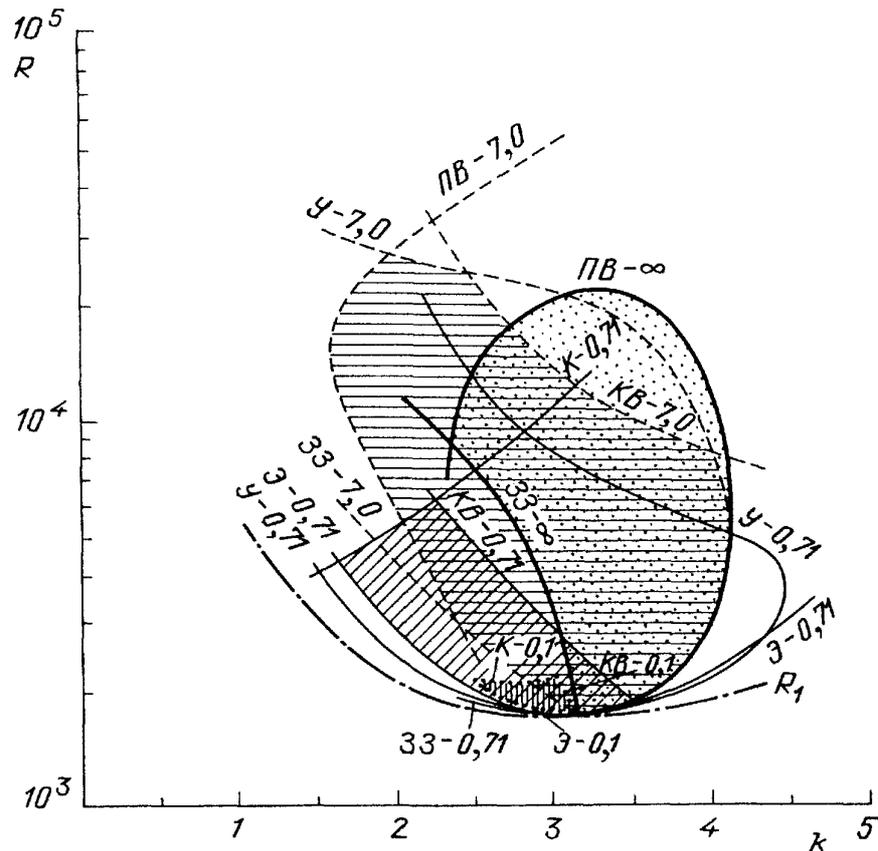


Рис. 15. Области устойчивости бесконечных пространственно-периодических систем валов (в плоскости  $k, R$ ) — "баллоны Бюссе" — для  $P = \infty$  (заполнена точками) [164],  $P = 7$  (горизонтальная штриховка) [172],  $P = 0,71$  (наклонная штриховка) [171],  $P = 0,1$  (вертикальная штриховка) [171]. Границы областей образованы отрезками пороговых кривых различных типов неустойчивости, которые отмечены буквенными обозначениями с указанием значений  $P$

и соответственно имеют меньшие горизонтальные размеры. В конечном счете устанавливается трехмерное течение — суперпозиция основных и поперечных валов (*двухмодовая конвекция*). Устойчивость стационарной двухмодовой конвекции относительно бесконечно малых возмущений исследована в [103].

При промежуточных  $P$  может действовать  $U$  неустойчивость [171, 172]. В [177] путем численного эксперимента подробно исследовано поведение установившихся валов со вторичным течением, порожденным  $U$  модой, и собственные колебательные неустойчивости такой суперпозиции. Если  $R$  достаточно велико, то развитие  $U$  моды приводит к формированию концентрированных восходящих и нисходящих потоков. При полном развитии она образует характерную колеблющуюся *спицевидную* структуру, в которой просматриваются крупные ячейки типа многоугольных (формирование такой структуры, экспериментально наблюдавшееся в [17], было первоначально названо *коллективной* неустойчивостью).

Для умеренных  $P$  характерно также наличие небольшого отрезка границы области устойчивости (в ее верхней части, вблизи пересечения нейтральных кривых для ПВ и  $U$  мод), который обусловлен действием  $K1$  (при *больших*  $P$ ) или (и)  $K2$  (при меньших  $P$ ) неустойчивости [173]. В частности, обе эти моды присутствуют в случае  $P = 7$  и не отмечены на рис. 15 лишь из-за отсутствия соответствующей диаграммы в оригинальной работе.

При умеренных и малых  $P$  коротковолновая граница области устойчи-

ности определяется КВ модой [171, 172], которая наблюдается экспериментально [172] и увеличивает характерный масштаб течения.

Наконец, при  $P \lesssim 1$  одной из границ области устойчивости является нейтральная кривая К моды [170]. Заметим, что аналитическое исследование устойчивости валов в пределе  $P \rightarrow 0$  при свободных границах слоя [169] дает пороговое значение числа Рэлея для К неустойчивости  $R_i = R_c(1 + 0,31P^2)$  (оно рассчитано при  $k = k_c$ ). Это значит, что интервал  $R$ , в котором валы устойчивы, в этом пределе исчезает — в отличие от случая жестких границ, когда он конечен. Причина такого отличия в том, что К мода связана с появлением вертикальной компоненты завихренности, отсутствующей в невозмущенном валиковом течении. При свободных границах в пределе  $b \rightarrow 0$  может существовать незатухающее возмущение с однородной по слою вертикальной завихренностью (вращение слоя как целого). Критическое число Рэлея для колебаний соответствует такому возмущению. При жестких границах постоянная по  $z$  вертикальная завихренность запрещена граничными условиями, и критическое  $R$  достигается при конечном  $b$ . Дальнейшему исследованию К неустойчивости посвящена работа [174].

Описание результатов исследования устойчивости двумерных валов, полученных до 1980 г., имеется также в обзорах Б'уссе [22, 23].

Переход к случаю свободных границ заметно сокращает интервалы значений параметров, в которых возможно устойчивое валиковое течение. Исследование, выполненное аналитически для малых надкритичностей [175] и численно для их широкого диапазона [176], показало, что при  $P < 1$  ширина полосы волновых чисел устойчивых валов очень мала (например, при  $P = 0,71$  она ни для каких  $R$  не превышает 0,0065). Длинноволновая граница области устойчивости определяется в этом случае *колебательной косовари-козной неустойчивостью* (которая не обнаруживается в случае жестких границ), а коротковолновая — обычной (монотонной) КВ неустойчивостью. При  $P < P_c = 0,543$  устойчивое течение вообще невозможно. Отметим (это будет важно в дальнейшем), что интервал волновых чисел, в котором валы устойчивы к Э моде, тем не менее довольно широк при любых  $P$ . Для  $P = \infty$  границы баллона Б'уссе, определяемые в этом случае ПВ неустойчивостью, найдены в [211].

На основе описанных здесь результатов нужно сделать два важных вывода-замечания.

Во-первых, если исключить только что упомянутый случай (свободные границы,  $P < P_c$ ), то в некотором диапазоне чисел Рэлея всегда имеется интервал волновых чисел, соответствующий устойчивым двумерным валиковым течениям. При не слишком малых  $P$  он бывает довольно широким (причем его сужение по мере уменьшения  $P$  всегда связано с трехмерными неустойчивостями). Таким образом, все течения с волновыми числами, лежащими в интервале устойчивости, кажутся в равной степени реализуемыми. Из дальнейшего станет ясно, что это не так.

Во-вторых, если течение "вынуждено" перестраиваться, поскольку его  $k$  лежит за пределами области устойчивости, то чаще всего эта перестройка обусловлена трехмерными процессами. Это породило распространенное убеждение (поддержанное численными экспериментами [63]), что двумерные деформации являются малоэффективным средством изменения  $k$  (в частности, экспериментально наблюдаемого уменьшения  $k$  с ростом  $R$ ). Далее мы покажем ошибочность такой точки зрения.

Отметим теперь некоторые результаты исследования устойчивости валов другими средствами.

В [44] было предпринято такое исследование на основе модельных уравнений с целью выбрать такую модель, которая наилучшим образом воспроизводит свойства устойчивости, выявленные путем решения уравнений Буссинеска. Авторы рассмотрели два класса моделей — обобщения уравнения СХ (3.28) и Герцберга—Сивашинского (3.29). Поскольку в развитии некоторых неустойчивостей (в частности, КВ) принципиальную роль играет вертикальная компонента завихренности, авторы включили в уравнения обусловленный ею член, описывающий дрейф, а также в ряде случаев ввели специальную процедуру фильтрации, подавляющую коротковолновые неустойчивости (например, ПВ). Наилучшее качественное согласие со строгой теорией дала модель (3.29) при  $d = 3$  с добавлением дрейфа и фильтрации.

На языке теории фазовой динамики [41, 49, 29, 52, 53, 210] (см. п. 3.2.2) неустойчивость Э соответствует случаю  $D_{\parallel} < 0$ , а 33 при отсутствии среднего дрейфа — случаю  $D_{\perp} < 0$ . Средний дрейф, конечно, влияет на устойчивость валов [33, 34, 175, 176, 210]. 33 неустойчивость сильно подавляется им при малых  $P$  (в этом случае она имеет место, если  $D_{\perp}^{\text{eff}} < 0$ ). Напротив, на КВ моду дрейф действует дестабилизирующе. Анализ на основе уравнений (3.63), (3.64) показал [210], что при развитии КВ неустойчивости средний дрейф создает положительную обратную связь: вызванный деформацией валов, он усиливает ее, создает перетяжки и в конечном счете может вызвать пересоединение линий постоянной фазы и рождение пар дислокаций. Поэтому КВ неустойчивость играет существенную роль в возникновении фазовой турбулентности (см. гл. 5). Границы баллона Буссе, пороговые для Э, 33 и КВ мод неустойчивости, очень хорошо воспроизводятся при исследовании с помощью указанных уравнений [210], причем удается получить явные выражения для инкрементов и форму наиболее опасных возмущений.

При численном моделировании течений результаты далеко не всегда можно описать в терминах теории устойчивости, хотя в основном они с ней согласуются. Отметим лишь, что в двумерных расчетах с условиями периодичности на боковых границах расчетной области как при свободных [61], так и при жестких [62] горизонтальных границах полоса волновых чисел устойчивых течений очень широка (как и в случае Э моды) и почти заполняет весь диапазон линейной неустойчивости неподвижной жидкости. Если же задаются жесткие боковые стенки, то отмечается сужение полосы устойчивости [57] — см. п. 6.5.1. Из трехмерных численных экспериментов, выполненных с целью исследования устойчивости валов, можно упомянуть работу [212] ( $P = \infty$ , свободные границы, небольшие аспектные отношения расчетной области), где результаты сопоставляются с результатами [176, 211].

**6.3.2. Экспериментальные результаты.** Параллельно с теоретическими исследованиями устойчивости двумерных валиковых течений тот же вопрос изучался экспериментально — путем наблюдения за искусственно созданными валами заданной ширины.

Интересно, что в первой работе этого цикла, выполненной Чеком к Вайтхедом [16] почти одновременно с расчетами Буссе [164], были подмечены такие черты явления, которые впоследствии долгое время обычно обходились молчанием в дискуссиях: видимо, сыграло роль то обстоятельство, что эти черты прямо не удавалось связать с теоретически предсказанными неустойчивостями. Чен и Вайтхед, пользуясь техникой контролируемых начальных

условий (см. раздел 3.1), исследовали поведение валов при различных значениях их начальной ширины. Использовались круглые резервуары с  $\Gamma = 10 - 16$ , жидкости с  $P \sim 10^3$  (силиконовые масла) и метод теневой визуализации. Оказалось, что в исследованном диапазоне чисел Рэлея  $R_c \leq R \leq 2,5R_c$  область устойчивости валов к трехмерным возмущениям четко вырисовывается в плоскости  $(k, R)$ , причем с коротковолновой стороны она ограничена порогом ПВ неустойчивости, а с длинноволновой — 33. В этом смысле результаты согласуются с [164]. Но внутри этой области валы далеко не всегда сохранялись неизменными. Ширина их, вообще говоря, изменялась, стремясь к некоторому оптимальному значению, близкому к  $1,1h$ . Процесс такой перестройки в основном двумерен и возможен благодаря тому, что у боковых стенок, вблизи сингулярностей типа фокуса (см. рис. 8,б), рождаются новые или исчезают старые валы. Характерное время перестройки — десятки часов, что в сотни раз превышает  $\tau_v$  и сопоставимо с  $\tau_h$ . Интервал значений ширины валов (или волнового числа), в пределах которого вообще не обнаруживается существенных изменений валов, гораздо уже того интервала, где валы не подвержены трехмерным перестройкам. Напротив, в областях трехмерной неустойчивости изменения ширины валов происходят наряду с развитием трехмерных мод.

Таким образом, двумерная перестраиваемость валов в данном случае выглядит как их более общее свойство, чем трехмерная неустойчивость, и как более универсальный механизм достижения оптимального масштаба.

Более поздние эксперименты с контролируруемыми начальными условиями проводились с целью непосредственной проверки теоретических результатов Бюссе и Клевера (см. п. 6.2.1). Использовались прямоугольные резервуары. В [111] описаны эксперименты на силиконовом масле с  $P \sim 10^2$  при  $R_c < R < 6 \cdot 10^4 \approx 35R_c$ , в [141] — на силиконовом масле с  $P = 16$  и воде при  $70^\circ\text{C}$  ( $P = 2,74$ ), также в широком диапазоне чисел Рэлея, перекрывающем область существования устойчивых течений. В зависимости от  $R$  и искусственно навязанного  $k$  наблюдались либо устойчивые режимы (без явных перестроек валиковой структуры), либо развитие тех или иных типов неустойчивости, которые в большинстве случаев можно было отождествить с теоретически предсказанными. В [111] распределение точек, представляющих экспериментальные режимы, в плоскости  $(k, R)$  показало удовлетворительное согласие с расчетной диаграммой устойчивости [164] для  $P = \infty$  (см. рис. 15), в [141] области устойчивости были заметно деформированы и сдвинуты в сторону меньших  $k$  по сравнению с рассчитанными для соответствующих  $P$  (особенно при  $P = 2,74$ ). Это расхождение авторы объясняют конечной теплопроводностью верхней и нижней поверхностей слоя. Тем не менее, характерные размеры области устойчивости даже в последнем случае не очень сильно отличаются от теоретических, так что можно говорить о качественном подтверждении теории.

Следует, однако, иметь в виду одно важное обстоятельство<sup>(9\*)</sup>. В отличие от [16], в [111, 141] заключение об устойчивости валов делалось по истечении сравнительно короткого промежутка времени с момента начала свободной эволюции течения (т.е. выключения "вынуждающей" лампы). Время это всего вдвое или, самое большее, в несколько раз превышало  $\tau_v$ , а по сравнению с  $\tau_h$  было исчезающе малым. Это значит, что в тех случаях, когда авторы признавали режим устойчивым, вообще говоря, не исключалась возможность мед-

ленных квазидвумерных перестроек валов по ширине с тенденцией к некоторому оптимальному окончательному волновому числу — процесса, наблюдавшегося в [16]. Далее мы увидим (см. п. 6.5.4), что при некоторых условиях этот процесс может протекать быстро.

Эксперимент с контролируруемыми начальными условиями был также выполнен Буссе и Клевером [172] для проверки условий возникновения предсказанных в той же работе У и КВ неустойчивостей. В [17, 141, 140] исследовалась также устойчивость искусственно созданного двухмодового течения. Дальнейшие экспериментальные исследования устойчивости валов в резервуаре с умеренным  $\Gamma$ , демонстрирующие качественное согласие с теорией, описаны в [179].

Экспериментальное изучение реакции валиковой структуры на искусственно внесенные Э- и 33-возмущения в сопоставлении с теорией фазовой динамики выполнено в [178].

**6.4. Функционал Ляпунова и отбор.** То, что динамика конвектирующей жидкости, вообще говоря, невариационна, видно уже из возможности низкочастотной турбулентности, связанной с движением дефектов (гл. 5). В частности, монотонное убывание потенциала несовместимо с возможной цикличностью перестроек картины.

Тем не менее, бывают ситуации, когда можно ожидать потенциальной динамики. Для полости конечных размеров так обстоит дело, например, если  $P \rightarrow \infty$  или если течение двумерно, причем выполнены условия применимости уравнения НВЗ.

Для пространственно-периодических течений в бесконечной области интеграл, представляющий функционал Ляпунова, расходится. Иногда рассматривают потенциал, вычисленный для целого числа пространственных периодов и пересчитанный на единицу длины в направлении  $x$  волнового вектора (и, разумеется, на единицу длины в направлении  $y$ ). Назовем его *удельным потенциалом*. В бесконечной области сколь угодно малому изменению волнового числа соответствует конечная вариация периодической функции (скорости течения). Поэтому ясно, что не может быть аналогии между вариацией функционала конечной системы, связанной с малой вариацией поля скоростей, и вариацией удельного потенциала бесконечной системы, связанной с малым изменением волнового числа.

Согласно расчету Помо и Манвиля [41] для модели СХ (3.26), удельный потенциал имеет минимум на краю полосы волновых чисел, соответствующей устойчивым пространственно-периодическим валиковым течениям. Волновое число  $k_F$ , при котором этот минимум достигается и которое авторы назвали оптимальным, по мере роста надкритичности  $\varepsilon$  слегка убывает, причем его отклонение от критического волнового числа  $k_c$  пропорционально  $\varepsilon^2$ .

Из сказанного выше ясно, что наличие такого минимума не означает, что валиковая структура должна обязательно перестраиваться от неоптимального к оптимальному волновому числу, и не противоречит факту устойчивости течений с любыми волновыми числами, принадлежащими упомянутой полосе.

Вполне аналогичная ситуация возникает при определении "оптимального" значения угла  $\alpha$ , образуемого валами с нормалью к боковой стенке ([133]; см. раздел 4.2). Хотя минимум потенциала приходится на  $\alpha = \alpha_{opt} \neq 0$ , линейный анализ устойчивости валов показывает, что при  $\alpha = 0$  они устойчивы. Поскольку рассматривалась полубесконечная область, при сколь угодно малом

изменении  $\alpha$  вариация функции, описывающей валиковую структуру, на достаточно большом расстоянии от стенки оказывается конечной.

С точностью до поправок высшего порядка по  $\varepsilon$  оптимальное  $k_F$  в модели СХ соответствует тому  $k_{ZZ}$ , при котором обращается в ноль коэффициент поперечной диффузии фазы  $D_{\perp}$  (см. п. 3.2.2) или, иначе говоря, порогу  $33$  неустойчивости [41].

В ряду случаев (хотя и не во всех), которые будут рассмотрены в последующих разделах, реализуемые в потенциальных системах волновые числа совпадают с  $k_F$ .

В [46] была сделана попытка применить функционал Ляпунова для исследования сравнительной устойчивости различных (не слишком сложных) текстур.

Изучалось поведение функционала Ляпунова, рассчитываемого по формуле (3.39) модели СХ для экспериментально наблюдаемых эволюционирующих текстур [180, 151]. Точнее, расчеты проводились по формулам, найденным в [46] для вкладов в функционал, даваемых различными компонентами текстуры. Хотя в этом эксперименте число Прандтля было сравнительно малым ( $P = 2,5$ ), в диапазоне надкритичностей  $0 < \varepsilon < 3$  функционал либо монотонно убывал, либо на фоне общей тенденции к убыванию показывал небольшие кратковременные возрастания, связанные главным образом с возникновением новых дефектов. При **больших**  $\varepsilon$  нерелаксационный характер поведения становился более отчетливым. При очень малых  $\varepsilon$  **временные** изменения функционала весьма медленны и плохо поддаются исследованию. В установившихся режимах значения функционала Ляпунова имеют разброс в пределах 25% — это отражает неединственность возможных стационарных текстур при достаточно больших аспектных отношениях.

**6.5. Отбор в системе прямых параллельных валов.** Мы видели в разделе 6.3, что пространственно-периодическое двумерное валиковое течение в бесконечном слое может быть устойчивым, если его волновое число  $k$  лежит в более или менее широком интервале значений. В пределах этого интервала каждое  $k$  может быть с равным успехом реализовано, если только задать соответствующую пространственную периодичность в начальный момент. (Формально следуя распространенной тенденции (см. начало гл. 6), можно любое из этих  $k$  назвать "отобранным", хотя нелепость такого словоупотребления очевидна.)

Примерно так же обстоит дело в экспериментах [111, 141] с контролируемыми начальными условиями, хотя там валы с заданным  $k$  заполняли лишь область конечного размера — экспериментальную камеру. По крайней мере это так, если отвлечься от возможности перестроек за времена, большие времени эксперимента (типа наблюдавшихся в [16]).

Перестройку валов по ширине без топологических изменений и существенного нарушения двумерности, когда они стремятся достичь предпочтительного волнового числа, называют *упругой релаксацией*. В упомянутых случаях такой релаксации не выявлено. Обратимся теперь к некоторым другим ситуациям.

**6.5.1. Влияние боковых стенок.** Кросс с соавторами [27] с помощью амплитудных уравнений исследовали стационарные режимы двумерной конвекции при малой надкритичности  $\varepsilon = (R - R_c)/18\pi^2$  в ограниченной полости со свободными горизонтальными поверхностями и большим аспектным отношением (здесь  $R_c$  — для бесконечного слоя). Работа имела целью проанализи-

ровать возможность течений с различными волновыми числами  $k$  (различными  $q = k - k_c$ ). В бесконечном слое такие течения представимы "фазовращательными" решениями

$$A(x) = (1 - Q^2)^{1/2} e^{iQx}, \quad |Q| \leq 1, \quad (6.4)$$

уравнения НВЗ (3.5) для стационарного случая. Согласно (3.4) это означает, что  $-\varepsilon^{1/2} \leq q \leq \varepsilon^{1/2}$ . Если же область ограничена по  $x$  (хотя бы полубесконечна), то фазовращательные решения невозможны при условии  $A = 0$  на боковых стенках (см. (3.18)), но возможны при наличии пограничного вынуждения, обеспечивающего вблизи стенки ненулевое значение  $A$  порядка малой величины  $\lambda$ . Оказалось, что вдали от стенки, где  $A = O(1)$ , полоса допустимых  $q$  имеет ширину порядка  $\lambda \varepsilon^{1/2}$ .

В более реалистическом случае (боковые стенки конечной толщины и теплопроводности, теплоизолированные снаружи) из амплитудного уравнения (полученного авторами в следующем порядке по  $\varepsilon^{1/2}$  по сравнению с уравнением НВЗ) следует, что  $\lambda = \varepsilon^{1/2}$ . Это дает для полубесконечной области (с одной стенкой) полосу волновых чисел  $q_- \leq q \leq q_+$  шириной  $O(\varepsilon)$ , а для конечной области  $-L \leq x \leq L$  — дискретный набор значений  $q$ , лежащих в той же полосе (число этих значений порядка  $\varepsilon L/\pi$ ). Величины  $q_-$  и  $q_+$  пропорциональны  $\varepsilon$ , причем  $q_- < 0$  всегда, а знак  $q_+$  зависит от  $P$  и теплопроводности стенок.

Таким образом, внесение боковых стенок уменьшает ширину полосы волновых чисел возможных стационарных решений от  $O(\varepsilon^{1/2})$  до  $O(\varepsilon)$ . Неустойчивости могут сделать полосу еще уже.

Аналогичные результаты были получены в [43] на материале модельных уравнений — потенциального уравнения СХ (3.26) и непотенциального (3.27) — с условиями  $w = \partial_x w = 0$  на границах области.

Заметим, что полоса  $q_- \leq q \leq q_+$  не зависит от размера системы  $2L$ . Невозможность непосредственного предельного перехода к случаю бесконечного слоя авторы [27] объяснили тем, что при  $L \rightarrow \infty$  неограниченно возрастает время распространения влияния стенок вдоль слоя. Но в таком случае непонятно, почему той же самой полосой ограничиваются допустимые  $q$  в случае полубесконечной области. Мы сейчас приведем соображения, из которых следует, что при наличии хотя бы одной стенки стационарные решения с  $q$  вне указанной полосы невозможны.

Эффект сужения полосы истолковывается некоторыми авторами в том смысле, что боковые стенки сами по себе создают селективный фактор. Дадим этому эффекту другую интерпретацию, основанную на представлении о предпочтительном масштабе конвекции.

Сравним ситуацию в бесконечном слое и в ограниченной области. В первом случае плавная перестройка системы валов расширением или сжатием не осуществима, поскольку малое изменение ширины всех валов на одну и ту же величину не может быть получено как малое возмущение течения. Такая система должна потерять устойчивость лишь при достаточно большой неоптимальности волнового числа, которая приведет к разрушению сложившейся картины — рождению новых или исчезновению существующих валов. Во втором случае подстройка под оптимальное волновое число не обязательно требует значительных изменений поля скоростей: как отмечают сами авторы

[27], плавную подстройку могут обеспечить пограничные слои у боковых стенок. Если даже нельзя приблизиться к оптимуму без изменения числа валов, процесс их рождения или исчезновения также происходит легче в пограничных слоях, где скорость течения понижена (это показано численным интегрированием уравнения диффузии фазы [51]). Понятно, что если масштаб неоптимален, валы должны перестраиваться даже при наличии одной стенки и режим будет нестационарным.

Таким образом, пространственная периодичность (высокая упорядоченность) течения выступает как мощный противоселективный фактор. Боковые стенки не оказывают селективного действия, но обеспечивают меньший противоселективный эффект по сравнению с первым случаем.

Роль пограничных слоев видна, в частности, из результатов работы [181], где постановка задачи аналогична рассмотренной в [27], но (при более общем виде граничных условий) допускаются немалые значения параметра пограничного вынуждения  $\lambda$ , вплоть до  $O(1)$  (в обозначениях [181] это  $O(\epsilon^{1/2})$ ). При сильном вынуждении полоса волновых чисел оказывается более широкой и ее границы могут достигать границ экхаузовской неустойчивости.

В связи с предлагаемой точкой зрения интересно, что численное моделирование эволюции возмущений в длинной области, вмещающей 50 — 80 валов, выполненное по уравнениям (3.26) и (3.27) на больших **временных** интервалах [42], демонстрирует во всех случаях выработку единственного волнового числа. Для потенциальной модели (3.26) оно минимизирует удельный потенциал и, кроме того, совпадает с порогом зигзаговой неустойчивости, определяемым условием  $D_{\perp} = 0$  (см. п. 3.2.2). Для непотенциальной модели (3.27) реализуемое волновое число оказывается в области неустойчивости к зигзаговым возмущениям, где  $D_{\perp} < 0$ .

Как уже отмечалось, с эволюцией конвективных течений связаны различные характерные времена. Даниэле [50], развивая работу [27], исследовал устойчивость фазовращательных решений для полости  $-L \leq x \leq L$  и среди дискретного набора допустимых решений с  $q_{-} \leq q \leq q_{+}$  выделил устойчивые и неустойчивые. Оказалось, что окончательное установление значения  $k$  путем упругой релаксации происходит за время  $O(\epsilon^{-2})$ , более длительное, чем время установления амплитуды  $O(\epsilon^{-1})$ . При достаточно малых  $P$  заметно уменьшение  $k$  с  $\epsilon$ , т.е. качественное согласие с экспериментом достигается, несмотря на двумерность модели.

Результаты [27, 50] были дополнены численными расчетами эволюции валов по уравнению НВЗ [182]. Как и в [50], была выявлена неединственность устойчивых режимов. Это, впрочем, не исключает возможности получения (как в [42] по модельным уравнениям) единственного волнового числа с помощью амплитудного уравнения более высокого приближения, чем уравнение НВЗ.

В экспериментах с контролируруемыми начальными условиями [111, 141, 172], описанных в п. 6.2.2, можно было бы ожидать хорошего согласия с [27], чего на самом деле нет. Кроме того, что длительность эксперимента могла быть недостаточна, не исключено, что расхождение связано с сильным пристенным вынуждением: возможно, в этих экспериментах тепловые граничные условия обеспечивали устойчивые восходящие потоки у боковых стенок, фиксирующих положение крайних валов.

Однако имеется и такой эксперимент, в котором сужение полосы волновых

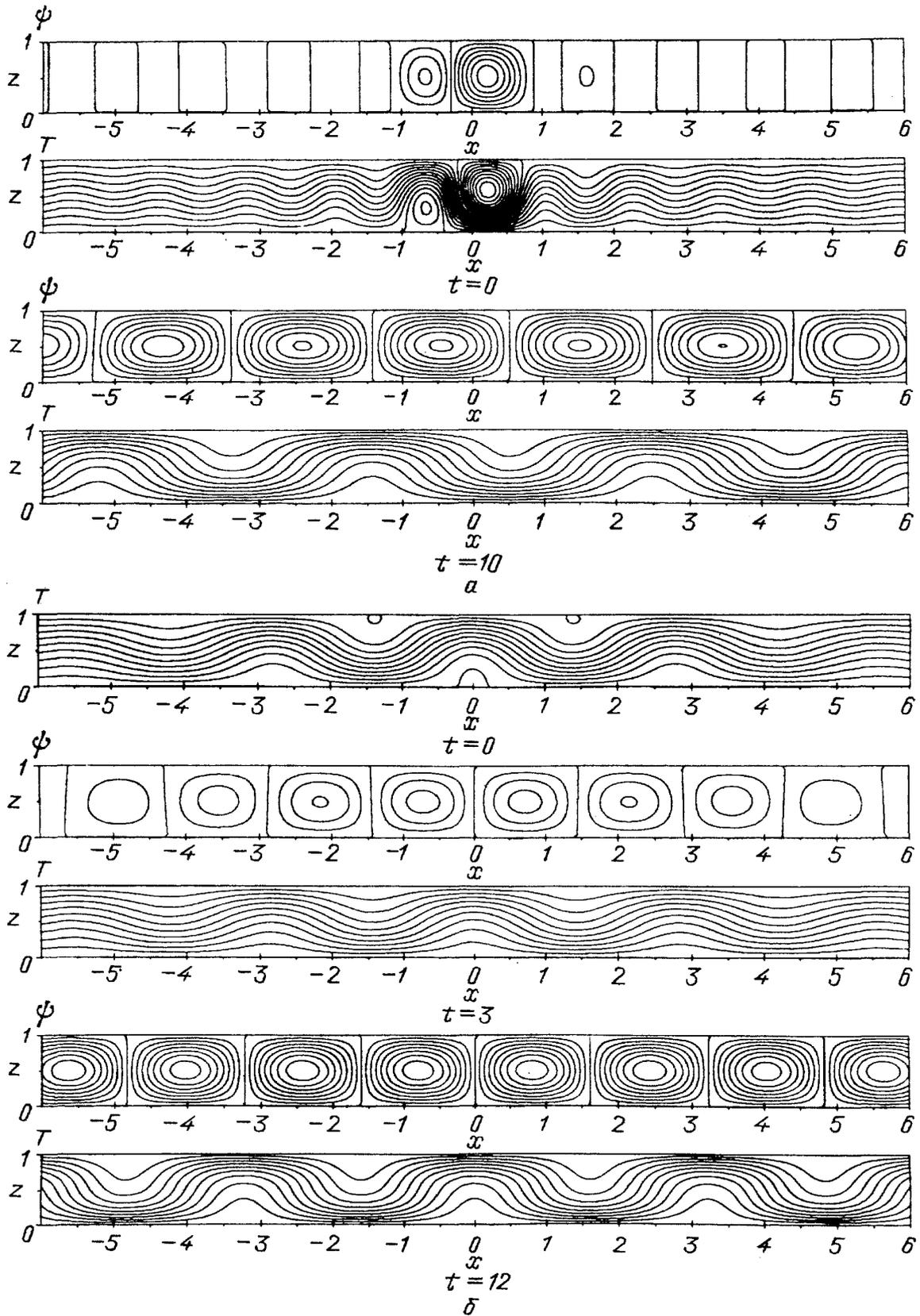


Рис. 16. Развитие конвекции в бесконечном слое из начальных возмущений первого (а) и второго (б) типа [60] (боковые границы рисунков не являются границами расчетной области). Показаны линии тока (изолинии функции тока  $\psi$ ) и изотермы. Время выражено в единицах  $\tau_v$  (в отличие от оригинальной статьи [60]).  $P = 0,1, R = 1,5R_c$

чисел, связанное с присутствием боковых стенок, наблюдалось [183], правда, при существенной роли термокапиллярного эффекта. Опыты проводились в кольцевом канале, имитирующем бесконечный слой; в канал могла вставляться радиальная перегородка для перехода к случаю конечного резервуара.

Этот эффект обнаружен и в двумерных численных экспериментах на основании полных уравнений [57]. На начальном этапе создавалось различное число валов. Перестройка обычно начиналась вблизи боковых стенок по образцу развития экхаузовской неустойчивости. За времена  $\lesssim 12\tau_v$  волновое число конвекции оказывалось в пределах полосы устойчивости, предсказанной в [173]. Дальнейшая эволюция происходила за времена, в несколько раз большие, и сужала полосу значений  $k$  в 3 раза.

Таким образом, и в натурном, и в численном эксперименте с неустойчивостями, выявленными теоретически для бесконечного слоя, можно отождествить лишь быстрые процессы.

**6.5.2. Случай большой свободы упругой релаксации.** Ясно выраженная тенденция к выделению предпочтительного волнового числа может наблюдаться при отсутствии боковых стенок.

Гетлинг [162, 184, 60] выполнил численные расчеты эволюции двумерного валикового течения в бесконечном слое со свободными горизонтальными границами на основе полной системы уравнений Буссинеска. Условие пространственной периодичности не ставилось, и поля скорости и температуры представлялись интегралами Фурье по  $x$ .

Были рассмотрены два типа начальных условий. Первый тип проиллюстрирован на рис. 16,а, вверху. В процессе эволюции конвекция охватывает все более широкую область, причем формирующиеся валы быстро приходят к установившемуся режиму (рис. 16,а, внизу), характеризуемому определенным значением волнового числа — *расчетным предпочтительным волновым числом*  $k_p$ , определяемым  $R$  и  $P$ . Начальное условие второго типа соответствует такому температурному возмущению, которое в самом начале эволюции генерирует набор валов заданной ширины, занимающий некоторую область конечной (по  $x$ ) ширины (рис. 16,б). Примечательно, что волновое число этих валов, каким бы ни было оно в начальный момент, стремится приблизиться к тому самому  $k_p$ , которое было получено в расчетах с начальными условиями первого типа. Рис. 16,б иллюстрирует такую перестройку валов. Важная черта этого процесса состоит в том, что чем больше валов было создано на начальном этапе, тем медленнее происходит последующая перестройка. Это подтверждает представление о противоселективной роли упорядоченных пространственно-периодических структур.

Отметим еще, что расчетное  $k_p$  при достаточно малых  $P$  убывает с  $R$ , что качественно соответствует экспериментально найденной закономерности (см. раздел 6.1). Как и в [50], перестройка течения по волновому числу оказывается возможной в рамках чисто двумерной геометрии.

Таким образом, "выработка" предпочтительного волнового числа посредством упругой релаксации валов может происходить весьма эффективно, если конвекция развивается из локализованных возмущений. По сравнению со случаем, когда есть боковые стенки, противоселективные факторы проявляют себя при этом еще меньше.

**6.5.3. Движение структурных границ.** Отчетливо демонстрирует упругую релаксацию конечный набор  $x$ -валов, к которому с обеих сторон примыкают, образуя две структурные границы, системы поперечных  $y$ -валов (рис. 17).

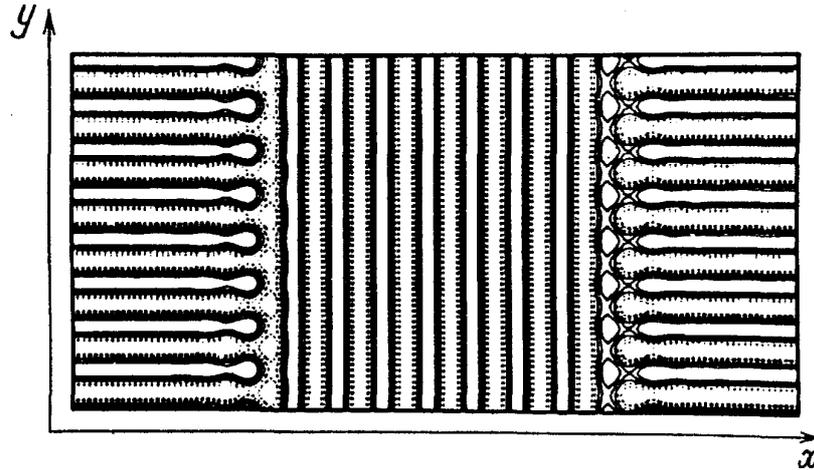


Рис. 17. Валиковая картина с двумя структурными границами (по [69])

Если  $x$ -валы неоптимальны по волновому числу, то  $y$ -валы легко изменяют свою длину и не оказывают существенного сопротивления перестройке  $x$ -валов. Хотя в целом такая картина течения трехмерна, перестройка  $x$ -валов представляет собой существенно двумерный процесс, а системы  $y$ -валов играют роль подвижных боковых стенок, подстраивающихся под оптимальную ширину системы  $x$ -валов.

Такая ситуация исследовалась путем решения модельных уравнений [69] — потенциального уравнения СХ (3.26) и непотенциального (3.29) при  $d = 3$ . Выполнялось численное интегрирование по времени; на границах расчетной области (рис. 17) ставились условия периодичности по  $x$  и  $y$ . Кроме того, для отыскания стационарных состояний применялся аппарат амплитудных уравнений, полученных из исходных модельных. Эти состояния с хорошей точностью совпадают с теми режимами, к которым приводит **временная эволюция**.

Для обоих модельных уравнений было найдено, что каждому  $\epsilon$  соответствуют единственные значения волновых чисел  $x$ - и  $y$ -валов  $k_x = k_x^s$ ,  $k_y = k_y^s$ , при которых возможно стационарное состояние. Если вначале  $k_x > k_x^s$ , то  $x$ -валы расширяются (а  $y$ -валы соответственно укорачиваются), в результате чего достигается стационарный режим. При начальном  $k_y > k_y^s$  появляются новые  $x$ -валы, т.е. уменьшается площадь, занятая неоптимальными  $y$ -валами. Если в начальный момент  $k_x > k_x^s$  и  $k_y > k_y^s$ , имеет место сочетание обоих процессов. Окончательное значение  $k_x = k_x^s$  во всех случаях не зависит ни от  $k_y$ , ни от начального  $k_x$ . Для потенциальной модели (3.26)  $k_x^s = k_y^s = k_F = k_{ZZ}$ , где  $k_F$  — значение волнового числа, минимизирующее удельный ляпуновский функционал, а  $k_{ZZ}$  — пороговое волновое число для зигзаговой неустойчивости. Для непотенциальной модели (3.29) ( $d = 3$ )  $k_x^s \neq k_y^s$ , причем оба этих значения не совпадают с  $k_{ZZ}$ , найденным в [44].

Экспериментальное исследование поведения системы валов, заключенной между двумя структурными границами, выполнили Пошо и Крокет [18, 185]. Эксперимент проводился с силиконовым маслом, имеющим  $P = 70$ , при контролируемых начальных условиях. Изначально индуцированные  $x$ -валы за-

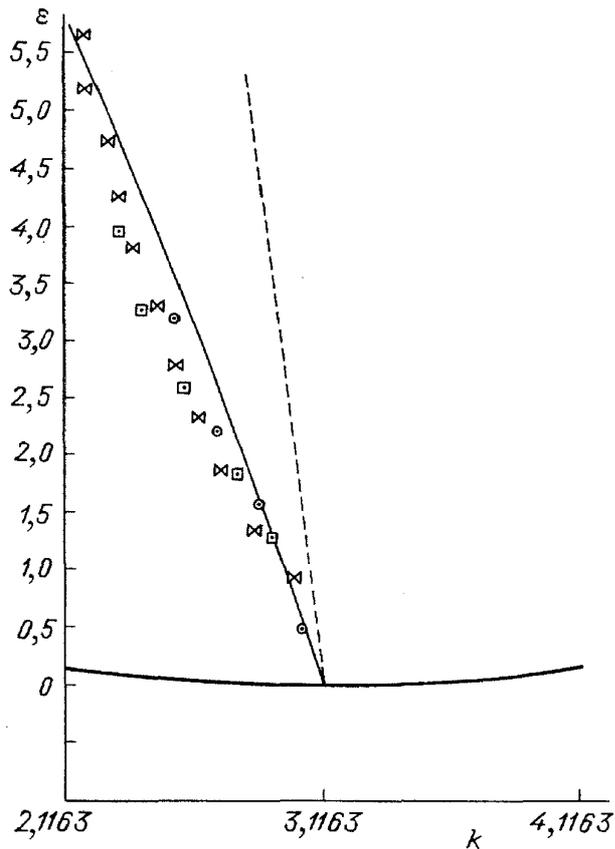


Рис. 18. Волновые числа в экспериментах со структурными границами и дислокациями ( $P = 70$ ) [18, 185]. Сплошная кривая внизу — нейтральная кривая устойчивости неподвижного состояния. Крестики — средние значения волновых чисел центральной системы  $x$ -валов в эксперименте со структурными границами, кружки — волновые числа структур со стационарной дислокацией, квадратики — волновые числа, полученные экстраполяцией скорости переползания (см. раздел 6.7); сплошная прямая — зависимость  $k_{ZZ}(\varepsilon)$  по [48, 49], штриховая —  $k_a(\varepsilon)$  по [49] (см. раздел 6.6)

страиваемость валов каждой из систем, вообще говоря, так же затруднена, как и в однородной бесконечной системе. Возможность равновесия границы определяется взаимодействием валов в пограничной области. (Заметим, что применимость аппарата амплитудных уравнений к исследованию реальных структурных границ ограничена. Для этого вида дефектов характерны резкие пространственные переходы, что противоречит идее медленного изменения амплитуды.)

**6.5.4. Упругая релаксация в контакте с неупорядоченным течением.** В эксперименте Бердникова, Гетлинга и Маркова [11] с этиловым спиртом ( $P = 16$ ) также исследовалось поведение валов, вначале искусственно индуцированных в средней части резервуара. Через камеру были протянуты в горизонтальном направлении тонкие проволоочки, по которым в начале каждого опыта в течение нескольких секунд пропускался электрический ток. Как только индуцированные валы становились отчетливо видимыми, ток выключался.

подняли резервуар не полностью, и вблизи боковых стенок, параллельных этим валам, благодаря поперечно-валиковой неустойчивости возникали системы коротких  $u$ -валов, отделенные от основной системы структурными границами (см. раздел 4.2). При каждом  $R$  течению давали установиться, а изменение  $R$  делалось небольшими шагами. Изучение последовательности равновесных состояний дало четкую однозначную (безгистерезисную) зависимость волнового числа основного набора валов от  $R$  (см. крестики на рис. 18). Как видно из диаграммы, это волновое число в некоторой части диапазона  $R$  имеет систематическое, хотя и небольшое, отклонение от значения  $k_{ZZ}$ . В то же время оно практически совпадает со значением, полученным в этой же работе при изучении условий равновесия дислокаций (см. раздел 6.7).

Если имеется единственная структурная граница, разделяющая две полубесконечные системы валов с волновыми векторами, произвольно направленными относительно этой границы, то на уровне анализа амплитудных уравнений было найдено [186], что стационарное состояние возможно при определенных значениях волновых чисел, зависящих от указанных углов и отличающихся от  $k_c$  на величину  $O(\varepsilon)$  (если только эти углы не слишком близки). В таком случае пере-

В отличие от опытов Пошо и Крокета [18, 185], эти валы занимали сравнительно небольшую часть резервуара, так что по обеим сторонам от них еще до выключения тока успевало сформироваться гораздо менее упорядоченное течение. Поскольку по периметру камеры имелся зазор, где верхняя поверхность слоя жидкости свободна (см. рис. 3), спонтанно развившиеся валы могли ориентироваться произвольно. Оказывая влияние на индуцированные валы, они постепенно разрушали их. Поэтому индуцированные валы не достигали установления: установиться в этих условиях может лишь единая валиковая картина на поздней стадии эволюции — вообще говоря, после разрушения индуцированных валов. Следить за изменением их волнового числа имело смысл лишь пока они в основном еще сохраняли свою упорядоченность.

Тем не менее, за это сравнительно короткое время (максимум несколько минут; ср.  $\tau_v \approx 3$  мин) происходила весьма существенная перестройка — упругая релаксация — индуцированных валов. Их среднее волновое число, независимо от начального значения, приближалось к тому наблюдаемому  $k_p$ , которое было получено в экспериментах со случайными начальными возмущениями [75] (на той же установке и с той же рабочей жидкостью). Этот процесс в основном двумерен. Поскольку он протекает за времена, малые по сравнению с  $\tau_h$  и временем  $\tau_h/P$  передачи воздействия вдоль слоя благодаря вязкости, на него не оказывают заметного воздействия боковые стенки (причем их влияние может быть дополнительно подавлено вследствие упоминавшейся буферной роли зазора со свободной поверхностью жидкости вблизи стенок).

Таким образом, предпочтительное волновое число проявляет себя как внутренняя характеристика конвекции при данных  $R$  и  $P$ . (Отметим, что оно не соответствует порогу устойчивости к зигзаговым возмущениям.)

Интересно, что несмотря на присутствие неупорядоченных течений по обеим сторонам индуцированных (упорядоченных) валов, эти валы эволюционируют примерно так же, как описано в [184, 60], где принималась полная неподвижность жидкости вне зоны начальных возмущений. Точно так же, как в [184, 60, 18, 185], здесь трехмерные процессы не необходимы для достижения оптимального волнового числа валов, которое, как обычно, демонстрирует убывание с ростом числа Рэлея.

З а м е ч а н и е к р а з д е л а м 6.1, 6.3 и пп. 6.5.2 — 6.5.4. Сопоставление описанных результатов показывает, что волновые числа, лежащие в пределах полосы устойчивости двумерных пространственно-периодических валиковых течений, отнюдь не равноправны с точки зрения реализуемости. Во-первых, эксперименты с неконтролируемыми начальными условиями (раздел 6.1) показывают, что средние волновые числа валиковых течений по своим собственным законам располагаются внутри области устойчивости и заполняют ее ограниченную часть (рис. 13; см. также рис. 9 в [72], рис. 1 в [171], где использованы экспериментальные данные работы [74], и рис. 5 в [75]). Во-вторых, эксперименты, описанные в [18, 185, 11] (см. пп. 6.5.3 и 6.5.4) и расчеты эволюции течений при отсутствии боковых стенок с начальной локализацией валов в ограниченной полосе слоя [184, 60] (п. 6.5.2) говорят о том, что локальное волновое число может изменяться вследствие упругой релаксации, даже если оно с самого начала лежит в области устойчивости. С другой стороны, из расчетов по модельным уравнениям [47] следует, что в круговой области при некоторых  $\Gamma$  возможны стационарные состояния, в которых волновые числа центральных валов лежат за порогом косовариковой

неустойчивости. Отсюда следует важный вывод: критерии устойчивости, найденные для бесконечного слоя, нельзя применять локально к какому-либо фрагменту конвективной структуры, исходя из локального волнового числа валов в этом фрагменте. Будет локальное  $k$  изменяться или нет — это зависит от общей геометрии течения.

**6.5.5. Пространственный рамп параметров.** Представим себе, что в направлении координаты  $x$  меняется разность температур  $\Delta T$  между поверхностями слоя и (или) его толщина  $h$ , поэтому локальное число Рэлея также является некоторой функцией  $R(x)$ . В таких случаях говорят, что имеется (*пространственный*) рамп числа Рэлея и определяющих его параметров. Нас будут интересовать такие рампы, что  $R(x)$  при некотором  $x = x_c$  переходит через критическое значение  $R_c$ . Пусть для определенности везде  $dR/dx \leq 0$ , причем в области  $x < x_c$  условия надкритические, а в области  $x > x_c$  — подкритические. Будем также считать, что надкритическая область левее некоторой точки  $x_1 < x_c$  однородна:  $h = \text{const}$ ,  $\Delta T = \text{const}$ .

При достаточно малой крутизне рампа  $|dR/dx|$  можно ожидать, что амплитуда двумерного течения типа  $x$ -валов, если таковое существует в надкритической области, будет постепенно убывать по мере перехода к подкритической области. Такой рамп должен действовать как "мягкая боковая стенка" — в частности, мало препятствовать упругой релаксации валов. (Вообще говоря, в системе с рампом может происходить крупномасштабная циркуляция жидкости, охватывающая область с характерными размерами области рампа. В частном случае, когда вертикальные координаты поверхностей слоя и их температуры изменяются согласованно, так что невозмущенные изотермы везде в слое горизонтальны, циркуляции не происходит.)

Возникает вопрос: будет ли при наличии медленного рампа в однородной надкритической области устанавливаться режим с предпочтительным волновым числом? На первый взгляд, результаты имеющихся теоретических исследований далеко не всегда дают на этот вопрос положительный ответ. Мы увидим, что они, тем не менее, не противоречат концепции внутреннего оптимального масштаба.

Крамер с соавторами [187] (см. также [188]) рассмотрели довольно общую задачу, исходя из системы реакционно-диффузионных уравнений

$$\partial_t u_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \Delta u_j + f_i(u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.5)$$

где параметры  $\alpha_i$ , от которых зависят  $D_{ij}$  и  $f_i$ , медленно меняются с  $x$ . В результате система переходит в пространстве от надкритических условий (когда возмущения исходного стационарного состояния, развиваясь, могут приводить к формированию периодических структур) к подкритическим (когда возмущения затухают). Авторы ввели медленную координату  $X$  и время  $T$  с помощью малого параметра, характеризующего скорость изменения  $\alpha_i$  и выполнили разложение уравнений, аналогичное использованному при выводе уравнения КН (п. 3.2.2). Полученное уравнение диффузии фазы (содержащее, вообще говоря, дрейф всей структуры в целом из-за неоднородности условий) в стационарном случае дает дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее распределение локального волнового числа  $k(X)$ , если оно задано в некоторой точке. Для выбора такой единственной зависимости авторы ис-

пользовали прием, который стал стандартным для такого рода задач, а именно, положили  $k = k_c$  в критической точке. (Обоснованность этого предположения является ключевым моментом, и мы ее далее обсудим.) Оказалось, что все рампы, которые могут быть трансформированы друг в друга преобразованием пространственной переменной, дают одну и ту же зависимость  $k$  от  $\alpha_j$ . В потенциальных системах все рампы приводят к одному и тому же значению  $k$  в однородной надкритической области — а именно, к тому  $k_F$ , которое минимизирует удельный потенциал однородной системы.

Связь между волновыми числами структур в системах, имеющих медленный рамп одного параметра  $\epsilon$ , и волновыми числами, минимизирующими функционал, была продемонстрирована в [189]. Для исходного стационарного уравнения самого общего вида было получено дифференциальное уравнение, связывающее  $\epsilon(x)$  и локальное волновое число  $k(x)$  "адиабатического" решения исходного уравнения. Явная зависимость  $k$  от  $\epsilon$ , найденная для некоторого семейства уравнений типа амплитудных, в случае потенциальных систем совпадает с зависимостью  $k_F$  от  $\epsilon$ . (Затем был рассмотрен пример системы реакционно-диффузионных уравнений, обсуждавшийся в [187]; полученное для нее амплитудное уравнение, согласно [188, 190], ошибочно.) Важный момент состоит в том, что переход от плавного рампа к крутому должен, согласно приведенным в [189] соображениям, проявляться в переходе от единственного волнового числа к конечной полосе волновых чисел.

Конвекция жидкости с  $P = \infty$  в случае, когда верхняя поверхность слоя является изотермической горизонтальной плоскостью, а положение и температура нижней границы зависят от медленной координаты  $X$ , была рассмотрена в [191]. Разложение системы уравнений Буссинеска по образцу работы [187] дало уравнение для  $k(X)$ , которое при малых надкритичностях  $\epsilon$  и свободных границах сильно упрощается и в некоторых случаях допускает аналитическое решение. Вообще говоря, система валов испытывает дрейф. Когда он отсутствует (что не обязательно означает отсутствие крупномасштабного течения), локальное  $k$  непосредственно выражается через локальное  $\epsilon$ . Кривые на плоскости  $(k, \epsilon)$ , представляющие такие зависимости и проходящие через критическую точку  $(k_c, 0)$ , могут, в зависимости от структуры рампа, иметь весьма различный по характерной величине наклон, и притом разного знака. Создается впечатление, что предпочтительное волновое число никак себя не проявляет.

Постановка задачи в [192] отличается от предыдущей тем, что верхняя и нижняя границы слоя считаются жесткими, а число Прандтля — конечным. Слой однороден по толщине, рампа имеется только в распределении  $\Delta T$ . Уравнение для фазы валов в стационарном случае (когда есть, тем не менее, крупномасштабное течение, но конвективный перенос фазы компенсируется диффузионным) связывает локальное  $k$  с локальным  $R$ . Зависимость  $k(R)$  находится численным интегрированием в большом диапазоне чисел Рэлея для различных  $P$ . Величина  $P$  сильно влияет на вид интегральной кривой, проведенной через точку  $(k_c, R_c)$ . В частности, при  $P < 0,7$   $k$  растет с увеличением  $R$ , что резко расходится с поведением наблюдаемого  $k_p$  в однородном слое.

Экспериментальные исследования конвекции при наличии рампа невелики по объему, причем в некоторых из них, например [193], рампа столь крута, что не может играть роль "мягкой" боковой границы. Медленный рамп

воспроизведен в экспериментальной работе [13], но в ней не исследовалось поведение волнового числа как функции координаты  $x$  в зависимости от  $R(x)$ .

Обсудим теперь физическую интерпретацию описанных результатов. Теоретические выводы о величине реализованного волнового числа в однородной надкритической области делаются на основании ключевого предположения, что локально  $k = k_c$  там, где  $R = R_c$ . С логической стороны этот шаг сомнителен. Значения  $R_c$  и  $k_c$  найдены для пространственно-периодических течений в однородном слое, где взаимодействие конвективных валов не создает среднего потока энергии вдоль слоя. В системах с рампом это, вообще говоря, не так: более энергичные валы, находящиеся в области с большей надкритичностью, передают свою энергию менее энергичным, существующим в менее надкритических условиях. Мало того, этот поток энергии не может обращаться в ноль в той самой точке, где режим критический, а неизбежно будет проникать в подкритическую область. В этом нас убеждает само существование решений, описывающих системы валов, простирающихся в эту область. Этот эффект аналогичен известному явлению проникающей конвекции (см., например, [194]): если невозмущенный профиль температуры  $T(z)$  не является линейным и в части диапазона высот  $z$  имеет место конвективная устойчивость ( $dT/dz > 0$ ), то конвективные движения проникают в эту устойчивую область. В случае, когда имеется рамп, также должно происходить проникновение в область устойчивости, но не по вертикали, а по горизонтали. А поскольку имеется не единственное решение, а семейство решений, отражающих эффект горизонтального проникновения, то, по крайней мере, искусственно создать разные распределения  $k(R)$ , в принципе, можно. Подобно тому, как нельзя локально применять критерий устойчивости уже сформировавшихся валов (см. замечание в конце п. 6.5.4), нет оснований локально применять и критерий устойчивости неподвижной жидкости, а тем более — считать, что локальные условия диктуют и локальное значение волнового числа.

Следовательно, расхождение в реализованных волновых числах между системами с различными рампами или между случаем рампа и другими ситуациями не может служить аргументом против существования предпочтительного волнового числа. Тем более интересно, что в потенциальных системах такого расхождения нет (исключение составляет случай, рассматриваемый в следующем параграфе).

**6.5.6. Движение фронта конвекции.** В п. 6.5.2 рассматривалась ситуация [162, 60], когда в слое неподвижной жидкости, находящемся в неустойчивом (надкритическом) состоянии, создается локализованное двумерное возмущение. Валиковая структура распространяется на все более широкую часть слоя. Процесс этот выглядит как движение двух фронтов конвекции, удаляющихся в противоположных направлениях от области начального возмущения.

Движение фронта, отделяющего сформированную периодическую структуру от невозмущенной области, рассматривают как один из "механизмов отбора", поскольку при определенных условиях можно предсказать волновое число структуры, возникающей позади фронта [195, 196].

Обратимся к простейшему варианту уравнения НВЗ

$$\partial_T A = \partial_x^2 A + A - A^3 \quad (6.6)$$

с действительной функцией  $A$  — частному случаю нелинейного уравнения диффузии. Будем интересоваться такими решениями этого уравнения, кото-

рые имеют вид  $A(X, T) = A_c(X - cT)$ , где  $c$  — постоянная скорость фронта, и, следовательно, удовлетворяют уравнению

$$A_c'' = -cA_c' - A_c + A_c^3, \quad (6.7)$$

причем

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} A_c(X) = 1, \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} A_c(X) = 0. \quad (6.8)$$

Очевидно, (6.7) можно интерпретировать как уравнение движения материальной точки единичной массы в поле потенциала  $\Phi(A_c) = A_c^2/2 - A_c^4/4$ , если считать  $A_c$  координатой,  $X$  — временем, а  $c$  — коэффициентом трения. Согласно (6.8), частица выходит с нулевой скоростью из точки максимума потенциала ( $A_c = 1$ ) к конечному состоянию — в точку его минимума ( $A_c = 0$ ). Понятно, что решения такой задачи существуют при любом  $c > 0$ . Чем больше  $c$ , тем медленнее движется частица, т.е. тем больше ширина фронта.

Существует класс начальных условий исходной задачи, который приводит к отбору определенной скорости фронта — это показано в [197] в связи с проблемами популяционной генетики. А именно, все начальные состояния системы, описываемые функциями  $A(X, 0)$ , которые ограничены полосой  $0 \leq A \leq 1$ , где  $A$  не равно повсюду нулю и убывает с  $X$  по крайней мере так же быстро, как  $e^{-X}$ , порождают фронты, движущиеся (в пределе  $T \rightarrow \infty$ ) со скоростью  $c = 2$ . Эта скорость является минимальной, при которой  $A(X, T)$  остается повсюду неотрицательной (на языке упомянутой аналогии  $c = 2$  — наименьшее значение коэффициента трения, при котором частица, скатившись в потенциальную яму, не проходит точку минимума потенциала с конечной скоростью).

Скорость  $c = 2$  является выделенной и в другом отношении — решение  $A_2$  обладает пороговой (marginal) устойчивостью, понимаемой в следующем специальном смысле. Воспользуемся системой отсчета, движущейся со скоростью фронта  $c$ . Если возможно такое малое локализованное возмущение, искажающее вид функции  $A_c$ , которое не будет ни расти, ни затухать в некоторой фиксированной точке движущейся системы отсчета, скажем, что  $A_c$  обладает пороговой устойчивостью, хотя бы внесенное возмущение даже и породило волну нарастающей амплитуды, удаляющуюся от точки наблюдения.

Если уравнение (6.6) для действительного  $A$  понимается именно как амплитудное уравнение (например, НВЗ или совпадающее с ним по форме амплитудное уравнение для модели СХ), то валиковая структура за фронтом имеет в любом случае волновое число  $k_c$ . С помощью комплексной амплитудной функции, фаза которой меняется с  $X$ , можно описать структуры с  $k \neq k_c$ . Амплитудное уравнение для комплексного  $A$  имеет класс решений с бегущим фронтом и "вращающейся" фазой. В [196] приводятся аргументы, согласно которым локализованное начальное возмущение должно, тем не менее, порождать режим бегущего фронта с практически постоянной фазой амплитудной функции (т.е. с  $k = k_c$ ) и, соответственно, скоростью фронта  $c = 2$ .

То условие, что "естественная" скорость фронта должна соответствовать

пороговой устойчивости, авторы применили — уже в качестве гипотезы — и к случаю, для которого такое соответствие не доказано, а именно, к описанию распространения пространственно-периодической структуры в рамках уравнения СХ. Полученные таким образом значения  $c = c^*$  и  $k = k^*$  отличаются от найденных из амплитудного уравнения  $c = 2$ ,  $k = k_c$  поправками  $O(\epsilon^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , причем  $k$  растет с  $\epsilon$ .

Далее, этот процесс был смоделирован численно на основе уравнения СХ с локализованным начальным возмущением [195, 196]. Получено хорошее согласие значений  $c$  и  $k$  с теми, которые следуют из гипотезы пороговой устойчивости.

Величина  $k^*$  заметно отличается от значения  $k_f$  волнового числа, минимизирующего удельный функционал Ляпунова для модели СХ.

Моделирование движения конвективного фронта в слое с жесткими границами путем численного решения двумерных уравнений Буссинеска было выполнено в [198] для  $P=1$ . Для инициации процесса задавался кратковременный нагрев боковой стенки. Был исследован диапазон относительных надкритичностей  $0,01 \leq \epsilon \leq 0,2$ . Полученные значения скорости оказались близки к предсказанным в [195, 196]. Волновые числа структуры за фронтом хорошо согласуются с волновым числом  $k_{\max} = k_c(1 + 0,245\epsilon)$ , при котором по линейной теории максимален инкремент нарастания возмущений неподвижного состояния [10].

В [199] на материале амплитудного уравнения проведено исследование распространения фронта в том случае, когда исходное (неустойчивое) состояние не является невозмущенным, а соответствует периодической структуре с некоторым волновым числом, лежащим за пределами полосы устойчивости. Позади фронта формируется новая, устойчивая структура с другим волновым числом. Численное моделирование при начальных условиях, соответствующих резкому ступенчатому переходу от устойчивого к неустойчивому состоянию в некоторой точке  $x = x_0$ , показало, что скорость фронта согласуется с гипотезой пороговой устойчивости. В плане нашего обсуждения интересно то, что окончательное волновое число, выработанное позади фронта, зависит от исходного волнового числа перед фронтом. Притом имеются интервалы значений окончательного  $k$ , которые не достижимы ни при каком исходном.

Во всех рассмотренных случаях скорость фронта  $c$ , пересчитанная на обычные физические масштабы времени и длины, не зависящие от надкритичности  $\epsilon$ , равна

$$V = c \frac{\xi_0}{\tau_0} \epsilon^{1/2}. \quad (6.9)$$

Следовательно, время прохождения фронтом некоторого фиксированного расстояния есть величина  $O(\epsilon^{-1/2})$ . Развитие же конвекции из малых возмущений происходит, согласно (2.22), за время  $O(\epsilon^{-1})$ . Поэтому ясно, что на экспериментальное воспроизведение движения фронта конвекции в неподвижной неустойчивой жидкости можно рассчитывать лишь при очень малых надкритичностях, иначе спонтанное развитие конвективных структур произойдет раньше, чем фронт успеет заметно продвинуться.

В [200] описан эксперимент с водой при  $30,2^\circ\text{C}$  ( $P = 5,373$ ) в диапазоне  $4 \cdot 10^{-4} < \epsilon < 2,5 \cdot 10^{-1}$ . Использовалась камера, длина которой  $27,3h$ , а ши-

рина — примерно вчетверо меньше. В начале каждого опыта увеличением нагрева снизу слой жидкости переводился из подкритического в надкритическое состояние и одновременно включался дополнительный подогрев одной из коротких боковых стенок. От этой стенки начинал двигаться фронт, оставляя позади себя валиковую структуру. Скорости фронта в исследованном интервале значений  $\epsilon$  с большой точностью соответствуют (6.9) с  $c = 2$ . Волновое число структуры позади фронта увеличивается с  $\epsilon$ .

Переходя к обсуждению, обратим внимание на то, что и по гипотезе пороговой устойчивости, и по численному эксперименту (кроме [162, 60]), и по натурному волновое число структуры позади фронта оказывается тем большим, чем больше надкритичность. Несоответствие этого волнового числа значениям, реализуемым в других "механизмах", а также минимуму удельного потенциала (в модели СХ), приводят как иллюстрацию отсутствия универсального критерия отбора.

Тезис о несовпадении "отобранных" в разных ситуациях волновых чисел можно даже усилить. По-видимому, движение фронта само по себе способно давать структуры с различными волновыми числами. Если даже утверждение об отборе режимов со скоростью  $c = 2$  имеет универсальный характер, то относится оно лишь к пределу  $t \rightarrow \infty$ . Пока не достигнуто установление, скорость фронта может варьировать в широких пределах: чем медленнее спадает по  $x$  начальное возмущение, тем, очевидно, быстрее победит вначале фронт. Разными, вообще говоря, будут и волновые числа.

Но, с другой стороны, в представленных здесь результатах полностью отсутствует эффект упругой релаксации — перестройки сформированных за фронтом валиковых структур по волновому числу, отмеченный в [60]. Можно было бы думать, что при малых  $\epsilon$  этот процесс окажется малозаметным, так как время установления положения границ валов в полости конечной длины есть  $O(\epsilon^{-2})$  [50]. Но это верно для резервуара, уже заполненного валами. Если же набор валов заключен между фронтами, за которыми жидкость практически неподвижна, то скорость процесса сильно зависит от ширины набора и может быть гораздо большей [60]. Далее, чем быстрее движется фронт, тем быстрее состояние системы приближается к условиям "плотной упаковки" валов в резервуаре, тем резче должна замедляться упругая релаксация. Согласно недавним расчетам Гетлинга по уравнению НВЗ, большие скорости должны "консервировать" волновое число, даже если оно неоптимально. Интересно, что надкритичность влияет на скорость релаксации главным образом через скорость фронта, и при меньших надкритичностях перестройка происходит быстрее.

Если процесс движения фронта описывается амплитудным уравнением НВЗ, то волновое число сформированной структуры оказывается, как мы видели, равным  $k_c$ . Волновое число  $k_F$ , которое минимизирует удельный потенциал и при вариационной динамике проявляет себя как предпочтительное  $k_p$ , для уравнения НВЗ также равно  $k_c$ . В этом случае реализованное волновое число соответствует оптимуму.

В численных экспериментах [198] по полным уравнениям Буссинеска и натурном эксперименте [200] релаксация валов могла остаться незамеченной из-за малой длины области течения и, соответственно, малого времени наблюдения. В численных экспериментах [195, 196] по уравнению СХ распределение локальных волновых чисел  $k$  по  $x$  имеет минимум в точке инициации процесса  $x = 0$ , где  $k$  гораздо ближе к  $k_F$ , чем  $k = k^*$  увалов, сформированных

позднее ( $k^* > k_F$ ). Это может быть отражением упругой релаксации, при которой  $k$  уменьшается, приближаясь к  $k_p = k_F$ . (Правда, авторы утверждают, что вблизи  $x = 0$ , наоборот,  $k$  растут. Такое возможно на более позднем этапе, когда валов с  $k = k^*$  уже много: они также стремятся расшириться и при этом поджимают валы вблизи  $x = 0$ .)

Все это означает, что имеющиеся результаты исследования движения фронтов никак не противоречат возможности существования предпочтительного волнового числа.

**6.6. Волновые числа осесимметричных течений.** В последних двух разделах этой главы будут обсуждены свойства двух важных классов течений с качественно иной геометрией.

Помо и Манвиль [201] рассмотрели стационарную осесимметричную систему кольцевых валов в неограниченном слое на больших расстояниях  $r$  от оси симметрии. Общая процедура разложения уравнений по  $1/r$  приводит в первом порядке по этому параметру к системе уравнений, условие разрешимости которой определяет единственное волновое число  $k_a$  валов. Авторы заключили, что это волновое число всегда совпадает с пороговым значением  $k_{ZZ}$  для зигзаговой неустойчивости и обеспечивает выполнение условия  $D_{\perp} = 0$ . Впоследствии выяснилось, что этот критерий применим лишь в определенных случаях.

Важное уточнение внесли в этот вопрос Манвиль и Пикмаль [49]. Как было сказано в п. 3.2.2, эти авторы получили [48, 49] эффективное значение  $D_{\perp}$  для слоя с жесткими границами с учетом крупномасштабного дрейфового течения, которое имеет вертикальный профиль типа пуазейлевского и стремится устранить зигзаговую деформацию валов. В системе концентрических кольцевых валов такое течение невозможно, так как оно должно быть направлено по радиусу к оси симметрии и приводить к накоплению вещества в центральной части. Поэтому в осесимметричной системе радиальное течение из-за перераспределения давления приобретает иной вертикальный профиль — с двумя узлами и нулевым интегральным потоком. Если учесть это течение, то в области больших  $r$  при достаточно малых надкритичностях волновое число  $k_a$  будет определяться соотношением [49]

$$\frac{k_a - k_c}{k_c} = - \frac{N'(P)}{R_2(P)} \frac{R - R_c}{R_c},$$

где  $N'(P) = 0,166 + 1,426P^{-1} - 1,220P^{-2}$ , а  $R_2(P)$  имеет тот же вид, что и в (3.43). Из сравнения (6.10) и (3.43) видно, что  $k_a$  соответствует условию  $D_{\perp}^{\text{eff}} = 0$  только в пределе  $P \rightarrow \infty$ , когда  $D_{\perp}^{\text{eff}} = D_{\perp}$ , а если  $P$  конечно, то при  $k = k_a$   $D_{\perp}^{\text{eff}} > 0$ .

Как пишут об этом обстоятельстве Кросс и Ньюэлл [53], анализируя модифицированное уравнение КН (3.60), учет среднего дрейфа не влияет на волновое число осесимметричной картины (поскольку дрейф при такой геометрии не возникает), но изменяет значение  $k_{ZZ}$ , стабилизируя поперечные возмущения валов.

В случае свободных границ, как уже говорилось, не происходит диффузионной релаксации зигзаговых возмущений, зигзаговая мода заменяется ко-

лебательной, и коэффициента  $D_{\perp}^{\text{eff}}$  при конечных  $P$  не существует. Для волнового числа осесимметричной конвекции с применением той же техники получено [49]

$$\frac{k_a - k_c}{k_c} = \frac{1}{16P} \left( \frac{5}{P} - 3 \right) \frac{R - R_c}{R_c}. \quad (6.11)$$

Дальнейшее развитие этой работы связано с отказом от предположения о малости надкритичности [202]. Для нахождения  $k_a$ , обеспечивающего разрешимость уравнения, получаемого в первом порядке по  $1/r$ , был применен комбинированный численный метод: горизонтальная зависимость переменных, описывающих течение, представлялась галеркинской аппроксимацией, а вертикальная — конечно-разностной. Авторы исследовали широкий диапазон чисел  $R$  и  $P$ .

Результаты [49, 202] обладают характерной чертой, резко контрастирующей с известной по экспериментам закономерностью поведения волнового числа: при  $P < 0,784$  согласно (6.10), а также, грубо говоря, при  $P < 0,7$  по расчетам [202] волновое число  $k_a$  возрастает с увеличением  $R$  (как было отмечено в разделе 6.1, именно при малых  $P$  в экспериментах с неконтролируемыми начальными условиями наиболее заметно убывание  $k$  с  $R$ ).

Здесь следует отметить, что, вообще говоря, рассчитывать на хорошую сопоставимость приведенных здесь результатов анализа "отбора" волновых чисел в осесимметричной системе валов с экспериментом едва ли можно. Этот анализ относится к валам большого радиуса и в то же время не предполагает наличия внешней границы резервуара. Поэтому в реальности радиус этой границы (цилиндрической стенки) должен, в свою очередь, быть заметно больше радиусов рассматриваемых валов, чтобы влияние границы было несущественным. А это означает, что валы уже не будут образовывать концентрических колец, поскольку вряд ли удастся поддерживать такую осесимметричную картину. Должна возникнуть или единая система почти прямых и почти параллельных валов, или текстура, в которой главная роль будет принадлежать участкам с такими валами. Найденные волновые числа будут представлять, таким образом, довольно академический интерес.

С другой стороны, уравнение фазовой диффузии (3.63) позволяет получить точное значение волнового числа стационарной осесимметричной картины для любого  $P$  [210]. Из-за отсутствия среднего дрейфа в такой картине  $rkB = \text{const}$  и, чтобы так было вплоть до центра симметрии, постоянная в правой части должна быть равна нулю в ведущем порядке разложения. Это означает, что  $k$  равно такому  $k_B$ , при котором  $B(k_B) = 0$  (ср. выражение (3.67) для  $D_{\perp}$ ; заметим, что авторы [210] не включают в  $D_{\perp}$  дрейфовые эффекты, и формулы (3.67) верны всегда, но  $k_{ZZ} = k_B$  только при  $P = \infty$ ). Со значениями  $k_B$ , рассчитанными для соответствующих  $P$ , хорошо согласуются волновые числа валов, измеренные в [151] (при  $P = 2,5$  и трех значениях  $R$ ; см. рис. 12) и в [204] ( $P = 6,1$ ; см. ниже). (Эти экспериментальные данные близки и к значениям  $k_a$ , найденным в [202] для больших  $P$ .) В [210] показано, что при  $k < k_B$  ( $k > k_B$ ) фокус валиковой картины действует как источник (сток) валов.

Измеренные в эксперименте волновые числа кольцевых валов, как уже было сказано в разделе 6.1, убывают с ростом  $R$ . При увеличении  $R$  время от времени в центре картины происходит исчезновение "лишнего" кольцевого вала [136, 137]. Сингулярность типа фокуса играет, таким образом, важную

роль в процессах перестройки по волновому числу, точно отражаемую результатом [210].

Крокет и Пошо [185] провели сопоставление своих экспериментальных  $k$  для  $\Gamma = 20$ ,  $P = 70$  и 14 (силиконовые масла) с теоретическими значениями  $k_a$  и  $k_{ZZ}$  (по [49]). Было получено существенное расхождение с расчетными данными: при  $P = 70$ , начиная с некоторых  $R$ ,  $k$  заметно меньше обоих теоретических значений (и с точки зрения теории должно приходиться на область неустойчивости), а при  $P = 14$  лежит между этими значениями (для  $P = 70$  теоретические зависимости  $k_{ZZ}(\epsilon)$  и  $k_a(\epsilon)$  показаны на рис. 18, при  $P = 14$  линия  $k_{ZZ}(\epsilon)$  еще сильнее наклонена влево). Изменение числа валов в системе при изменении  $R$ , происходящее благодаря зарождению или исчезновению вала в фокусе системы, — процесс дискретный. Понятно, что при чередовании увеличения и уменьшения  $R$  изменения волнового числа демонстрируют гистерезис. Но связанная с ним неоднозначность заметно меньше, чем расхождение измеренного  $k$  с  $k_a$  и  $k_{ZZ}$ .

При тщательном измерении наблюдаемой картины выявилась деталь, с которой авторы связали упомянутое расхождение и которая весьма интересна с точки зрения исследования устойчивости и геометрии течений. Картина не была строго осесимметричной. Фокус системы валов оказался смещенным относительно центра резервуара (на величину порядка 1 мм при радиусе резервуара 40 мм). При  $P = 14$  смещение было больше, чем при  $P = 70$ , а в пробных экспериментах с метиловым спиртом ( $P = 7$ ) оказалось даже заметным на глаз. Это указывает на то, что строго осесимметричная картина, в которой радиальный градиент давления подавляет средний по высоте радиальный поток, неустойчива относительно малых нарушений симметрии. Авторы предположили, что асимметрия порождает общую циркуляцию двухвихревого ("дипольного") типа (рис. 19), которая и делает формулу (6.10) неприменимой.

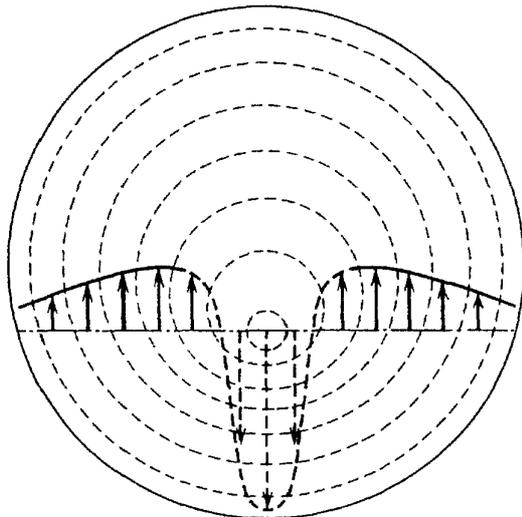


Рис. 19. Эксцентрические кольцевые валы и профиль крупномасштабного течения в эксперименте [203]. Сплошные кривые и стрелки — реально измеренные скорости, штриховые (жирные) — гипотетические скорости

Для проверки этой гипотезы был поставлен специальный эксперимент [203]. В рабочую жидкость (метанол,  $P = 7$ ) добавлялось фотохромное вещество — бензотиазолиновая производная спиропирана, окрашивающееся под влиянием ультрафиолетового излучения. Подвергая облучению выделенный диаметр в системе кольцевых валов, экспериментаторы метили таким образом часть объема жидкости и могли затем выявить эффект крупномасштабного потока.

Если постепенно увеличивать  $R$ , то асимметрия картины оказывается наиболее сильной перед аннигиляцией очередного центрального вала и исчезает после аннигиляции. Поэтому почти при одном и том же  $R$  можно было наблюдать и симметричную, и асимметричную картину. Было замечено, что диаметральная метка не деформи-

руется в осесимметричной картине (хотя и диффузно размывается), но испытывает систематический перенос средним потоком в несимметричной, если ориентирована перпендикулярно эксцентричному смещению фокуса.

Данный эксперимент демонстрирует таким образом существование крупномасштабного течения, связанного, согласно [33, 34], с кривизной валов. Средний дрейф в эксцентрично деформированной системе кольцевых валов был рассчитан в [2] по модифицированному уравнению КН (3.60), а также в [210]: *неустойчивость фокуса*, приводящая к такой деформации, там была получена линейным анализом устойчивости осесимметричного течения по уравнениям (3.63), (3.64). Интересно, что эта неустойчивость может возникать при  $R$  и  $k = k_B$ , лежащих внутри баллона Буссе.

Еще один эксперимент, в котором наблюдался эксцентриситет (и изучались волновые числа осесимметричной конвекции), был выполнен [204] при  $\Gamma = 7,5$ ,  $P = 6,1$  (вода при  $25^\circ\text{C}$ ). При  $\varepsilon > 0,16$  система кольцевых валов, созданная в начале опыта пристенным вынуждением, в дальнейшем оставалась устойчивой практически без такого вынуждения (это, несомненно, следствие малого аспектного отношения). При  $\varepsilon < 0,16$  за времена, гораздо **бóльшие**  $\tau_h$ , происходил переход к меньшей упорядоченности (текстурам). Эксцентриситет кольцевых валов был заметен, начиная с  $\varepsilon \approx 2,5$ , и менялся с  $\varepsilon$  качественно так же, как в [203].

Измеренные волновые числа оказались близкими к полученным в [137] при  $P \approx 500 - 900$  и резко отличными от  $k_a$ , рассчитанных для  $P = 6,1$  по [49]. Зато они хорошо согласуются с  $k_B$ , найденными для того же  $P$  в [210]. В изменении  $k$  с  $\varepsilon$  наблюдался гистерезис.

**6.7. Движение и равновесие дислокаций.** Наличие дефектов в конвективных структурах делает весьма разнообразными возможные пути достижения системой предпочтительных волновых чисел. Возникновение и исчезновение валов при наличии сингулярностей типа фокуса легче всего происходит именно в этих фокусах. Уже отмечалась роль структурных границ в изменении волновых чисел. Теперь рассмотрим перестройки, связанные с движением дислокаций. Такие процессы в принципе не являются двумерными, хотя изучение двумерной перестройки очень помогает пониманию того, что происходит в данном случае.

Подавляющее большинство исследований посвящено механизму переползания дислокаций, который может обеспечить эффективную подстройку системы под оптимальное волновое число.

Вероятно, первым теоретическим исследованием движения дислокаций была работа Сиггиа и Циппелиус [205]. Вопрос изучался и аналитически (на основании уравнения НВЗ), и численно — интегрированием как полных уравнений приближения Буссинеска, так и уравнения НВЗ. Рассматривалась пара дислокаций, которая образуется, если "вклинить" в валиковую систему отрезок "лишней" пары валов — такая конфигурация получается, если дополнить рис. 20 его зеркальным отражением относительно верхнего края. Поскольку авторы пользовались амплитудным уравнением без учета вертикальной компоненты завихренности, основанные на нем результаты справедливы лишь в пределе  $P \rightarrow \infty$ .

Аналитический расчет был выполнен в предположении, что невозмущенная — без дислокаций — система валов (заполняющая бесконечный слой) имеет волновое число  $k = k_c + \delta k$ ,  $\delta k \ll 1$  (рассматривались только  $\delta k > 0$ ,

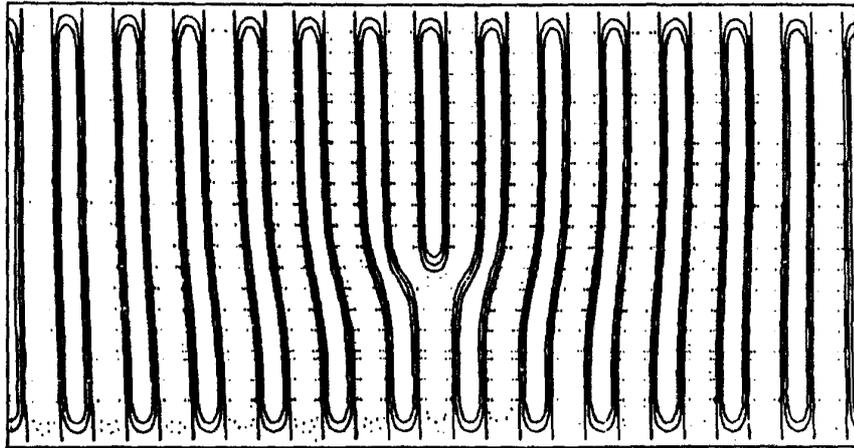


Рис. 20. Валиковая структура с дислокацией (по [68])

так как при  $\delta k < 0$  и  $P \gg 1$  в слабонадкритических условиях исходная валиковая система неустойчива). Считалось также, что  $\delta k^{-1/2}$  много меньше расстояния между дислокациями (т.е. длины "вклиненного" отрезка пары валов). При указанном выборе волнового числа дислокации сближаются, т.е. "вклиненная" пара укорачивается. Это означает, что валы, поджатые при внесении дислокации, стремятся расшириться. Для скорости  $V$ , с которой движется (переползает) каждая дислокация, было получено выражение, структура которого не зависит от типа граничных условий на поверхностях слоя:

$$V = 1,47 \frac{\xi_0^2 \delta k^{3/2}}{\sqrt{2k_c^{1/2} \tau_0}}, \quad (6.12)$$

где  $\xi_0$  и  $\tau_0$  определяются формулами (2.24) — (2.26). Таким образом, в использованном авторами приближении волновое число невозмущенной структуры, в которой внесенная дислокация оказывается стационарной,  $k_d$ , совпадает с  $k_c$  (т.е., для уравнения НВЗ, и с  $k_F$ ).

Численные эксперименты проводились псевдоспектральным методом при условиях периодичности по  $x$  и  $u$  на границах расчетной области. Это означает, что если размер области по  $x$  равен  $L_x$  и невозмущенная система  $n$  пар валов имеет соответственно волновое число  $2\pi n/L_x$ , то в той (ограниченной по  $y$ ) части валиковой картины, которая возмущена наличием дефекта (на рис. 20 в верхней части) волновое число равно  $2\pi(n+1)/L_x$ .

Основной целью авторов было определение скорости дислокации. Оказалось, что ее значения, полученные на основе полных уравнений и из амплитудного уравнения, не всегда хорошо согласуются даже при  $P = \infty$ . В ряде случаев эволюция течения осложнена неустойчивостями, и анализ результатов затруднен. Если структура в основных чертах сохраняется достаточно долго, то скорость дислокаций довольно быстро устанавливается и впоследствии меняется мало. Связь скорости с волновыми числами систематически не исследовалась. Отмечено, что по мере увеличения  $n$  и  $L_x$  при фиксированном волновом числе невозмущенной картины, равном  $k_c$ , скорость дислокаций стремится к нулю (другого результата ожидать трудно, поскольку в этом пределе возмущенное волновое число стремится к невозмущенному).

Сила, определяющая переползание дислокации в кристаллической структуре, называется *силой Пича—Кёлера* (ПК) [206]. Если дополнительный слой, вклиненный в структуру и оканчивающийся дислокацией, сдавливается

окружающими слоями, сила ПК стремится вытолкнуть этот слой и устранить дислокацию. Если же давление окружающих слоев отрицательно, сила ПК вдвигает дополнительный слой глубже. В теории конвективных структур рассматривают аналог этой силы. В случае потенциальной динамики изменение функционала Ляпунова, связанное со смещением (переползанием) дислокации на некоторое расстояние, трактуется как работа силы ПК. Вычислим эту силу согласно [68].

Будем считать основным параметром системы валов, содержащей дислокацию, волновое число  $\bar{k}$ , полученное усреднением локальных волновых чисел по рассматриваемой области. Пусть дислокация находится в точке  $(0, y_d)$  внутри полосы  $-L < x < L$ , границы  $x = \pm L$  которой фиксируют положение крайних  $x$ -валов. Тогда при смещении  $\delta y_d$  дислокации изменение  $\delta F_L$  функционала Ляпунова  $F_L$  будет обусловлено лишь тем, что в прямоугольнике площадью  $2L\delta y_d$  валы с волновым числом  $k_+ = k|_{y \rightarrow +\infty}$  заменятся на валы с волновым числом  $k_- = k|_{y \rightarrow -\infty}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta F_L &= -(F(k_+) - F(k_-)) \cdot 2L\delta y_d = - \left. \frac{dF}{dk} \right|_{k=\bar{k}} \cdot 2L(k_+ - k_-)\delta y_d = \\ &= - \left. \frac{dF}{dk} \right|_{k=\bar{k}} \cdot 2\pi\delta y_d, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где  $F(k)$  — удельный потенциал для однородной картины, характеризуемой волновым числом  $k$ , замена конечной разности дифференциалом сделана в предположении большого  $L$ , а  $\bar{k} = (k_+ + k_-)/2$ . Таким образом, сила ПК равна

$$f_{ПК} = - \frac{dF_L}{dy_d} = -2\pi \left. \frac{dF}{dk} \right|_{k=\bar{k}} \quad (6.14)$$

Очевидно, дислокация стационарна, когда  $f_{ПК} = 0$ , т.е.  $\bar{k}$  равно волновому числу  $k_F$ , минимизирующему  $F$ , а следовательно, соответствует, кроме того, границе устойчивости к зигзаговым возмущениям:

$$k_d = k_F = k_{ZZ}. \quad (6.15)$$

В [207] связь скорости движения дислокации с волновым числом валиковой структуры исследовалась на материале двух задач: о конвекции в слое, ограниченном пластинами с плохой теплопроводностью (эта задача допускает вариационную формулировку; см. п. 3.2.2) и о конвекции в слое пористого вещества. Как и в аналитической части работы [205], здесь рассмотрена структура, переходящая на больших расстояниях от дислокации в регулярную валиковую структуру с волновым числом  $k$ . Используется аппарат амплитудных уравнений. В стационарном случае условие разрешимости уравнения для комплексной амплитуды определяет значение  $k_d$ , в нестационарном при данном  $k$  — скорость переползания  $V$ .

В первой задаче найдено, что

$$V \propto (k - k_d)^{3/2}, \quad (6.16)$$

причем  $k_d = k_F = k_{ZZ}$ . Получена также связь этой скорости с коэффициентами

диффузии фазы  $D_{\perp}$  и  $D_{\parallel}$ . Вторая задача, которая в рассмотренном приближении невариационна, приводит к значению  $k_d$ , не совпадающему с  $k_{zz}$ .

В работе рассмотрено также скольжение дислокации — движение в направлении, перпендикулярном валу. Отмечено, что при вариационной динамике в системе валов с однородной кривизной скольжение невозможно: потенциал системы при скольжении не меняется, и нечем компенсировать потери энергии из-за вязкости.

Имеется аналитическое и численное исследование поведения дислокации [68] на основе модельных уравнений — потенциального уравнения СХ (3.26) и непотенциального (3.29) при  $d = 3$ . Рассматривалась также модификация этих моделей, включающая крупномасштабный дрейф — (3.30) — (3.32).

Скорость движения дислокации в потенциальных моделях пропорциональна  $(\bar{k} - k_d)^{3/2}$  (ср. с формулой (6.12), полученной в [205]). Для непотенциальных моделей  $k_d$  не совпадает с другими выделенными волновыми числами —  $k_{zz}$  и  $k_a$ . При малых  $\bar{k} - k_d$  скорость переползания растет линейно с этой величиной.

Таким образом, основные закономерности поведения дислокаций не зависят от деталей постановки задачи и легко интерпретируются, если исходить из представления о предпочтительном волновом числе. Переползание стремится приблизить валиковую структуру к  $k_p$ , а равновесие дислокации имеет место, когда волновое число невозмущенной системы совпадает с  $k_p$ . Для потенциальных систем  $k_p = k_F$ .

Эксперименты, ориентированные специально на исследование дислокаций, были начаты, по-видимому, Буссе и Вайтхедом [111, 166] (в первой работе имеются лишь качественные выводы, слово *дислокация* еще не употребляется, и процесс ее вытеснения называется *pinching mechanism*; отмечается его роль как возможного механизма изменения волнового числа). С помощью техники контролируемых начальных условий изучалась цепочка дислокаций, возникающая на линии контакта двух систем валов, соприкасающихся торцами, причем волновые числа систем находятся в отношении 2:3. Значения волновых чисел были такими, что более узкие валы вытеснялись более широкими. Скорость движения дислокаций росла с  $R$  по закону, близкому к линейному, и убывала с  $P$  [166].

Обстоятельное экспериментальное изучение поведения изолированной дислокации выполнили Пошо и Крокет [18, 185]. Она создавалась при генерации начального течения путем освещения слоя через маску соответствующей формы. Были приняты специальные меры, чтобы вблизи боковых стенок камеры не развивалась поперечно-валиковая неустойчивость, как это было в эксперименте со структурными границами, описанном там же. Медные проволочки, приклеенные ко дну резервуара вблизи боковых стенок, благодаря тепловому контакту с дном создавали восходящие потоки, фиксирующие положение крайних валов. Использовалось силиконовое масло с  $P = 70$ .

Движение дислокации было, как правило, почти равномерным — лишь вблизи стенки оно иногда замедлялось и даже прекращалось (авторы пишут об этом эффекте как о захвате дислокации стенкой). Основные результаты измерения оптимальных волновых чисел  $k_d$ , соответствующих стационарному положению дислокации, не захваченной стенкой (т.е. в средней части резервуара), представлены на рис. 18. В тех случаях, когда стационарности удавалось добиться подбором значения  $R$ ,  $k_d$  определялось как среднее арифме-

тическое между двумя волновыми числами, присутствующими в картине, — невозмущенным и возмущенным. Эти значения отмечены на рисунке крестиками. Другой способ определения  $k_d$  основывался на применении закона  $(k - k_d)^{3/2}$  (см. (6.12) и (6.16)) к скоростям переползания, измеренным при различных  $k$  и фиксированном  $R$  (здесь  $k$  также имеет смысл полусуммы двух значений). Соответствующие  $k_d$  на рисунке обозначены квадратами.

Видно, что измеренные волновые числа неплохо согласуются с  $k_{ZZ}$  вплоть до  $\varepsilon \approx 1,5$ . Авторы считают это согласие хорошим во всем исследованном диапазоне надкритичностей, экстраполируя на этот диапазон линейный закон изменения  $k_{ZZ}$  с  $\varepsilon$ , полученный в [48, 49] для малых  $\varepsilon$ . Думается, для такого заключения (и соответственно, для вывода о вариационном характере динамики при всех  $\varepsilon$ ) достаточных оснований все же нет. Но тем интереснее, что данные авторов — до  $\varepsilon \approx 4$  — демонстрируют превосходное согласие между оптимальными волновыми числами, найденными в эксперименте с дислокациями и в эксперименте с движением структурных границ (см. п. 6.5.3). Это говорит в пользу существования единственного предпочтительного волнового числа, независимо от потенциальности системы. Как при движении дислокации, так и при движении структурных границ геометрия течения не создает сильных противоселективных факторов, и система приходит к волновому числу, очень близкому к предпочтительному.

Роль переползания дислокаций в перестройке волнового числа валиковой структуры исследовалась также в экспериментах с воздухом [154]; отмечено также, что скольжение может вести к возникновению фазовой турбулентности.

Наконец, имеются интересные исследования дислокаций в двухмодовой структуре конвекции [208, 209]. Такие дислокации также могут демонстрировать скольжение [209] и играть существенную роль в переходе к хаотическому движению [208].

## 7. Заключение

Рассмотренный материал исследований убедительно показывает, что реализуемость течения не тождественна его устойчивости. В свою очередь, реализованное состояние не обязательно оптимально, оно является результатом совместного действия селективных и противоселективных факторов и зависит от общей геометрии течения, определяемой начальными и граничными условиями. Соответственно и об устойчивости нельзя судить по одной лишь локальной структуре течения.

Если говорить о системах двумерных валов, то нет ни одного факта, противоречащего концепции существования предпочтительного волнового числа, или внутреннего оптимального масштаба таких течений, несмотря на различия между реализуемыми волновыми числами в разных конкретных ситуациях. В тех случаях, когда динамика конвекции может быть описана релаксационными моделями, такой оптимум соответствует минимуму удельного потенциала.

Наличие структурных неоднородностей — дефектов — или хотя бы пограничных слоев у боковых стенок ослабляет противоселективные факторы, придает структуре дополнительные степени свободы. Поэтому чем больше в эволюционирующей структуре дефектов — "резервов" перестройки к оптимальному — тем ближе окончательное волновое число (по крайней мере, в среднем пространственной картине) к предпочтительному. В спонтанно возникающих структурах, развитие которых проходит стадию сложных текстур и по-

степенного устранения дефектов, предпочтительное волновое число оказывается, таким образом, наивероятнейшим.

Сколько-нибудь полное понимание условий равновесия текстур — дело будущего. Из сказанного ясно лишь, что чем сложнее текстура, тем более жесткими должны быть условия ее стационарности. Поэтому разные части текстуры могут быть в разной степени близки к оптимуму и в разной степени устойчивы, оптимизация одних фрагментов может идти за счет деоптимизации других. При некоторых условиях наряду с исчезновением дефектов постоянно возникают новые, текстура не приходит к стационарному состоянию, и наблюдается фазовая турбулентность.

Требуют более внимательного изучения медленные процессы. Не исключено, что во многих случаях, когда оптимум кажется недостижимым, за большие времена противоселективные факторы все же могут быть преодолены.

Наконец, пока совершенно не исследованы характер стремления к оптимальному масштабу и возникновение противоселективных факторов в условиях предпочтительности трехмерных форм течения. Можно ожидать, что общие закономерности, прослеживаемые в двумерных течениях, будут так или иначе проявлять себя и в трехмерных.

Автор благодарит всех коллег, приславших материалы по теме обзора, и Л.М. Алексееву за детальное обсуждение его содержания и текста.

#### ПРИМЕЧАНИЯ

<sup>(1)</sup> Изредка ее называют конвекцией Бенара—Рэля, а также конвекцией Бенара или конвекцией Рэля. Вряд ли стоит опускать имя кого-либо из этих двух пионеров систематического исследования конвекции — экспериментатора и теоретика. Имея в виду хронологию работ, было бы правильнее, вопреки традиции, имя Бенара упоминать первым. Если же говорить о физике явлений, то объединение двух имен в одном термине отражает давнюю, до конца все еще не изжитую путаницу в понимании механизма конвекции. А именно, Бенар наблюдал явление, в котором заметную роль играет неустойчивость, связанная с температурной зависимостью коэффициента поверхностного натяжения; Рэлей же рассматривал конвекцию, вызванную другой неустойчивостью — из-за температурной (и плотностной) неоднородности слоя жидкости. Различие этих двух механизмов проявляется себя в разной структуре течений, о чем пойдет речь в разделе 4.1. В обзоре рассматривается почти исключительно конвекция, обусловленная рэлеевским механизмом. Именно к ней обычно и относят термин *конвекция Рэля—Бенара*, оставляя за термокапиллярной конвекцией название *конвекция Бенара—Марангони*.

<sup>(2)</sup> В последнее время в литературе слово *ячейка* часто употребляется в другом значении — как синоним термина *резервуар*, *камера* или *полость* (рабочий объем экспериментальной установки). Не следует смешивать два этих варианта словоупотребления.

<sup>(3)</sup> Некоторые авторы определяют аспектное отношение как величину, обратную указанной здесь.

<sup>(4)</sup> Понятно, что установка для криогенного эксперимента конструктивно сильно отличается от описанной здесь.

<sup>(5)</sup> Часто отмечается аналогия уравнений двумерных моделей конвекции с уравнением Гинзбурга—Ландау теории сверхпроводимости, отсюда — и заимствование терминологии.

<sup>(6)</sup> По непонятным причинам в отечественной литературе их часто называют гексагональными ячейками или гексагонами.

<sup>(7)</sup> Ясно, что в данной ситуации (и во всех аналогичных, которые встретятся еще не раз) возможен гистерезис при переходах (неподвижное состояние)  $\rightleftharpoons$  (шестиугольные ячейки) в области конечноамплитудной подкритической неустойчивости неподвижного состояния и переходах (шестиугольные ячейки)  $\rightleftharpoons$  (валы) в области, где устойчивы оба типа движений.

<sup>(8)</sup> Соответствующий английский термин *grain boundary* в литературе по физике кристаллов, откуда он заимствован, часто переводится как *граница зерен*. В гидродинамическом контексте кажется более удачным другой его русский эквивалент — *структурная граница*, более, что *структура* — это одно из значений слова *grain*. Для обозначения данного типа движений употребляют также термин *домённая стенка*.

<sup>(9)</sup> Автор благодарен Э.Л. Кошмидеру, обратившему его внимание на этот момент

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Ландау Л.Д., Лифшиц ЕМ.* Гидродинамика. 3 изд. — М.: Наука, 1986.
2. *Newell A.C.*//Propagation in Systems Far from Equilibrium/Eds. J.E. Wesfreid et al. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1988. — P. 122.
3. *Rayleigh, Lord*//Phil. Mag. 1916. V. 32. P. 529.
4. *Pellew A., Southwell R.V.*//Proc. Roy. Soc. A. 1940. V. 176. P. 312.
5. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. — Oxford: Clarendon Press, 1961.
6. *Perez Cordon R., Velarde M.G.*//J. de Phys. 1975. T. 36. P. 591.
7. *Velarde M.G., Perez Cordon R.*//Ibidem. 1976. T. 37. P. 177.
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972.
9. *Wesfreid J., Pomeau Y., Dubois M., Normand C., Berge' P.*//J. de Phys. 1978. T. 39. P. 725.
10. *Dominguez-Lerma M.A., Ahlers G., Cannell D.S.*//Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 856.
- [11] *Бердников В.С., Гетлинг А.В., Марков В.А.* Препринт № 165-88. — Новосибирск: Инст. теплофизики СО АН СССР, 1988 //Exp. Heat Transfer. 1990. V. 3. P. 269.
12. *Кутателадзе С.С., Курдюшкин А.Г., Бердников В.С.*//Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана. 1974. Т. 10. С. 137.
13. *Rehberg I., Bodenschatz E., Winkler B., Busse F.H.*//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 282.
- Rehberg I., Busse F.H.*//[2]. — P. 225.
14. *Gollub J.P., McCarriar A.R., Steinman J.F.*//J. Fluid Mech. 1982. V. 125. P. 259.
15. *Martinet B., Haldenwang P., Labrosse G., Payan J.-C., Payan R.*//C.R. Ac. Sci. Ser. II. 1984. T. 299. P. 755; Cellular Structures in Instabilities/Eds. J.E. Wesfreid, S. Zaleski. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1984. — P. 33.
16. *Chen M.M., Whitehead J.A.*//J. Fluid Mech. 1968. V. 31. P. 1.
17. *Busse F.H., Whitehead J.A.*//Ibidem. 1974. V. 66. P. 67.
18. *Pocheau A., Croquette V.*//J. de Phys. 1984. T. 45. P. 35.
19. *White D.B.*//J. Fluid Mech. 1988. V. 191. P. 247.
20. *Горьков Л.П.*//ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 402.
- [21] *Malkus W.V.R., Veronis G.*//J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 225.
22. *Busse F.H.*//Rep. Prog. Phys. 1978. V. 41. P. 1929.
23. *Busse F.H.*//Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence/Eds. H.L. Swinney, J.P. Gollub. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1981; перевод: *Буссе Ф.Г.*//Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности/Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. — М.: Мир, 1984. — С. 124.
24. *Kuo H.L.*//J. Fluid Mech. 1961. V. 10. P. 611.
25. *Schlüter A., Lortz D., Busse F.H.*//Ibidem. 1965. V. 23. P. 129.
26. *Newell A.C., Whitehead J.A.*//Ibidem. 1969. V. 38. P. 279.
27. *Cross M.C., Daniels P.G., Hohenberg P.C., Siggia E.D.*//Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 898; J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 155.
28. *Segel L.A.*//Ibidem. 1969. V. 38. P. 203.
29. *Cross M.S.*//Phys. Rev. A. 1983. V. 27. P. 490.
30. *Brown S.N., Stewartson K.*//Proc. Roy. Soc. A. 1978. V. 360. P. 455.
- [31] *Cross M.C.*//Phys. Fluids. 1980. V. 23. P. 1727.
32. *Кузнецов Е.А., Спектор М.Д.*//ПМТФ. 1980. № 2. С. 76.
33. *Siggia E.D., Zippelius A.*//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 835.
34. *Zippelius A., Siggia E.D.*//Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 2905.
35. *Daniels P.G.*//Proc. Roy. Soc. A. 1977. V. 358. P. 173.
36. *Brown S.N., Stewartson K.*//Stud. Appl. Math. 1977. V. 57. P. 187.
37. *Cross M.C.*//Phys. Fluids. 1982. V. 25. P. 936.
38. *Manneville P.*//J. de Phys. 1983. T. 44. P. 759.
39. *Swift J., Hohenberg P.C.*//Phys. Rev. A. 1977. V. 15. P. 319.
40. *Ahlers G., Cross M.C., Hohenberg P.C., Safran S.*//J. Fluid Mech. 1981. V. 110. P. 297.
- [41] *Pomeau Y., Manneville P.*//J. de Phys. Lett. 1979. T. 40. P. 609.
42. *Pomeau Y., Manneville P.*//Phys. Lett. A. 1980. V. 75. P. 296.
43. *Pomeau Y., Zaleski S.*//J. de Phys. 1981. T. 42. P. 515.
44. *Greenside H.S., Cross M.C.*//Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 2492.
45. *Gertsberg V.L., Sivashinsky G.I.*//Prog. Theor. Phys. 1981. V. 66. P. 1219.
46. *Cross M.C.*//Phys. Rev. A. 1982. V. 25. P. 1065.
47. *Greenside H.S., Cross M.C., Coughran W.M.*//Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 2269.
48. *Manneville P., Piquemal J.M.*//J. de Phys. Lett. 1982. T. 43. P. 253.
49. *Manneville P., Piquemal J.M.*//Phys. Rev. A. 1983. V. 28. P. 1774.
50. *Daniels P.G.*//Proc. Roy. Soc. A. 1981. V. 378. P. 539.

- [51] *Daniels P.G.*//J. Fluid Mech. 1984. V. 143. P. 125.
52. *Newell A.C.*//Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science/Ed. H. Fujita. — Amsterdam: North-Holland, 1983. — P. 205.
53. *Cross M.C., Newell A.C.*//Physica D. 1984. V. 10. P. 299.
54. *Whitham G.B.*//J. Fluid Mech. 1970. V. 44. P. 373.
55. *Берковский Б.М., Полевиков В.К.* Вычислительный эксперимент в конвекции. — Минск: изд-во "Университетское", 1988.
56. *Orszag S.A.*//Stud. Appl. Math. 1971. V. 50. P. 293; J. Fluid Mech. 1971. V. 49. P. 75.
57. *Arter W., Bernoff A., Newell A.C.*//Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 3840.
58. *Arter W., Newell A.C.*//Ibidem. 1988. V. 31. P. 2474.
59. *Гетлинг А.В.*//ДАН СССР. 1977. Т. 233. С. 308.
60. *Getling A.V.*//J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 165.
- [61] *Ogura Y.*//J. Atmosph. Sci. 1971. V. 28. P. 709.
62. *Васин В.Г., Власюк М.Л.* Препринт № 84. — Москва: ИПМ АН СССР, 1974.
63. *Lipps F.B., Somerville R.C.J.*//Phys. Fluids. 1971. V. 14. P. 759.
64. *Veltishchev N.F., Zelnin A.A.*//J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 353.
65. *Greenside H.S., Coughran W.M., Schryer N.L.*//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 726.
66. *Greenside H.S., Coughran W.M.*//Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 398.
67. *Manneville P.*//J. de Phys. 1983. Т. 44. P. 563.
68. *Tesauero G., Cross M.C.*//Phys. Rev. A. 1986. V. 34. P. 1363.
69. *Tesauero G., Cross M.C.*//Phil. Mag. A. 1987. V. 56. P. 703.
70. *Cross M.C., Tesauero G., Greenside H.S.*//Physica D. 1986. V. 23. P. 12.
- [71] *Bénard H.*//Rev. generate sci pures et appl. 1900. Т. 11. P. 1261, 1309.
72. *Krishnamurti R.*//J. Fluid Mech. 1970. V. 42. P. 295.
73. *Krishnamurti R.*//Ibidem. P. 309.
74. *Wiltis G.E., Deardorff J.W., Somerville R.C.J.*//Ibidem. 1972. V. 54. P. 351.
75. *Бердников В.С., Курдюшкин А.Г.*//Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана. 1979. Т. 15. С. 812.
76. *Block M.J.*//Nature. 1956. V. 178. P. 650.
77. *Koschmieder E.L.*//Adv. Chem. Phys. 1975. V. 32. P. 109.
78. *Normand C., Pomeau Y.*//Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 581.
79. *Koschmieder E.L., Biggerstaff M.I.*//J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 49.
80. *Koschmieder E.L.*//Ibidem. 1967. V. 30. P. 9.
- [81] *Koschmieder E.L.*//On Turbulence: Proc. 5th EPS Liquid State Conference. Moscow, October 16 — 21, 1989. — M.: Inst. Prob. Mech. USSR Acad. Sci., 1989. — P.10; Europ. J. Mech. B/Fluids. 1991.
82. *Perez-Garcia C., Cerister P., Occelli R.*//[2]. — P. 232.
83. *Grodzka P.G., Bannister T.C.*//Science. 1972. V. 176. P. 506; 1975. V. 187. P. 165.
84. *Pearson J.R.A.*//J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 489.
85. *Nield D.A.*//Ibidem. 1964. V. 19. P. 341.
86. *Scanlon J.W., Segel L.A.*//Ibidem. 1967. V. 30. P. 149.
87. *Kraska J.R., Sani R.L.*//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1979. V. 22. P. 535.
88. *Cloot A., Lebon G.*//J. Fluid Mech. 1984. V. 145. P. 447.
89. *Graham A.*//Phil. Trans. Roy. Soc. A.1933. V. 232. P. 285.
90. *Tippelskirch H.v.*//Beitr. Phys. Atmosph. 1956. Bd. 29. S. 37.
- [91] *Palm E.*//J. Fluid Mech. 1960. V. 8. P. 183.
92. *Segel L.A., Stuart J.T.*//Ibidem. 1962. V. 13. P. 289.
93. *Palm E., Oiann H.*//Ibidem. 1964. V. 19. P. 353.
94. *Segel L.A.*//Ibidem. 1965. V. 21. P. 359.
95. *Davis S.H., Segel L.A.*//Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 470.
96. *Palm E., Ellingsen T., Gjevik B.*//J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 651.
97. *Busse F.H.* Das **Stabilitätsverhalten** der Zellularkonvektion bei endlicher Amplitude: Diss. Univ. Munich, 1962.
98. *Busse F.H.*//J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 625.
99. *Hoard C., Robertson C., Acrivos A.*//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1970. V. 13. P. 849.
100. *Richter F.M.*//J. Fluid Mech. 1978. V. 89. P. 553.
- [101] *Stengel K.C., Oliver D.S., Booker J.R.*//Ibidem. 1982. V. 120. P. 411.
102. *Oliver D.S., Booker J.R.*//Ceophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1983. V. 27. P. 73.
103. *Frick H., Busse F.H., Clever R.M.*//J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 141.
104. *Busse F.H., Frick H.*//Ibidem. 1985. V. 150. P. 451.
105. *Jenkins D.R.*//Ibidem. 1987. V. 178. P. 491.
106. *Stuart J.T.*//Ibidem. 1964. V. 18. P. 481.

107. *Jenkins D.R.*//Ibidem. 1988. V. 190. P. 451.  
 108. *Somerscales E.F.C., Dougherty T.S.*//Ibidem. 1970. V. 42. P. 755.  
 109. *Dubois M., Berge P., Wesfreid J.*//J. de Phys. 1978. T. 39. P. 1253.  
 110. *Walden R.W., Ahlers G.*//J. Fluid Mech. 1981. V. 109. P. 89.  
 [111] *Busse F.H., Whitehead J.A.*//Ibidem. 1971. V. 47. P. 305.  
 112. *Busse F.H., Riahi N.*//Ibidem. 1980. V. 96. P. 243.  
 113. *Proctor M.R.E.*//Ibidem. 1981. V. 113. P. 469.  
 114. *Jenkins D.R., Proctor M.R.E.*//Ibidem. 1984. V. 139. P. 461.  
 115. *Riahi N.*//Ibidem. 1985. V. 152. P. 113.  
 116. *Le Gal P., Pocheau A., Croquette V.*//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 2501.  
 117. *Le Gal P., Croquette V.*//Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 3440.  
 118. *Krishnamurti R.*//J. Fluid Mech. 1968. V. 33. P. 445.  
 119. *Krishnamurti R.*//Ibidem. P. 457.  
 120. *Желнин А.А.*//Метеорол. и гидрол. 1974. № 11. С. 29.  
 [121] *Roppo M.N., Davis S.H., Rosenblat S.*//Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 796.  
 122. *Hohenberg P.C., Swift J.B.*//Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 603//Phys. Rev. A. 1987. V. 35. P. 3855  
 123. *Meyer C.W., Cannell D.S., Ahlers G., Swift J.B., Hohenberg P.C.*//Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 947.  
 124. *Davis S.H.*//J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 465.  
 125. *Stork K., Müller U.*//Ibidem. 1972. V. 54. P. 599.  
 126. *Edwards B.F.*//Ibidem. 1988. V. 191. P. 583.  
 127. *Davies-Jones R.P.*//Ibidem. 1970. V. 44. P. 695.  
 128. *Chana M.S., Daniels P.G.*//Ibidem. 1989. V. 199. P. 257.  
 129. *Ozoe H., Sayama H., Churchill S.W.*//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1974. V. 17. P. 401.  
 130. *Stork K., Müller U.*//J. Fluid Mech. 1975. V. 71. P. 231.  
 [131] *Pocheau A., Croquette V., Le Gal P.*//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 1094.  
*Croquette V., Le Gal P., Pocheau A.*//Phys. Scr. 1986. V. T13, P. 135.  
 132. *Croquette V., Mory M., Schosseler F.*//J. de Phys. 1983. T. 44. P. 293.  
 133. *Zaleski S., Pomeau Y., Pumir A.*//Phys. Rev. A. 1984. V. 29. P. 366.  
 134. *Le Gal P.* Thesis. — Paris, 1986.  
 135. *Meyer C.W., Ahlers G., Cannell D.S.*//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1577.  
 136. *Koschmieder E.L.*//Beitr. Phys. Atmosph. 1966. Bd. 39. S. 1.  
 137. *Koschmieder E.L., Pallas S.G.*//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1974. V. 17. P. 991.  
 138. *Krishnamurti R.*//J. Fluid Mech. 1973. V. 60. P. 285.  
 139. *Gollub J.P., McCarriar A.R.*//Phys. Rev. A. 1982. V. 26. P. 3470.  
 140. *Whitehead J.A., Parsons B.*//Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1978. V. 9. P. 201.  
 [141] *Whitehead J.A., Chan G.L.*//Dyn. Atmosph. Oceans. 1976. V. 1. P. 33.  
 142. *Вельтищев Н.Ф., Желнин А.А.*//Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. 1977. № 6. С. 17.  
 143. *Ahlers G., Behringer R.P.*//Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40. P. 712.  
 144. *Ahlers G., Behringer R.P.*//Prog. Theor. Phys. Suppl. 1978. No. 64. P. 186.  
 145. *Behringer R.P.*//Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 657.  
 146. *Libchaber A., Maurer J.*//J. de Phys. Lett. 1978. T. 39. P. 369.  
 147. *Ahlers G., Walden R.W.*//Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44. P. 445.  
 148. *Fauve S., Laroche C., Libchaber A., Perrin B.*//Cellular Structures in Instabilities/Eds. J.E. Wesfreid, S. Zaleski. — Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1984. — P. 278.  
 149. *Behringer R.P., Gao H., Shaumeyer J.N.*//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1199.  
*Gao H., Behringer R.P.*//Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 2837.  
 150. *Motsay R.W., Anderson K.E., Behringer R.P.*//J. Fluid Mech. 1988. V. 189. P. 263.  
 [151] *Heutmaker M.S., Gollub J.P.*//Phys. Rev. A. 1987. V. 35. P. 242.  
 152. *Ahlers G., Cannell D.S., Steinberg V.*//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1373.  
 153. *Pocheau A.*//J. de Phys. 1989. T. 50. P. 2059.  
 154. *Letth J.R.*//Physica D. 1989. V. 37. P. 334.  
 155. *Manneville P.*//J. de Phys. Lett. 1983. T. 44. P. 903.  
 156. *Pocheau A.*//J. de Phys. 1988. T. 49. P. 1127.  
 157. *Daviaud F., Pocheau A.*//Europhys. Lett. 1989. V. 9. P. 675.  
 158. *Koschmieder E.L.*//3. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 527.  
 159. *Koschmieder E.L.*//Adv. Chem. Phys. 1974. V. 26. P. 177.  
 160. *Davis S.H.*//J. Fluid Mech. 1968. V. 32. P. 619.  
 [161] *Nield D.A.*//Ibidem. P. 393.  
 162. *Гетлинг А.В.*//ДАН СССР. 1980. Т. 250. С. 826.  
 163. *Malkus W.V.R.*//Proc. Roy. Soc. A. 1954. V. 225. P. 196.

164. *Busse F.H.*//J. Math. and Phys. 1967. V. 46. P. 140.  
 165. *Foster T.D.*//J. Fluid Mech. 1969. V. 37. P. 81.  
 166. *Whitehead J.A.*//Ibidem. 1976. V. 75. P. 715.  
 167. *Cotton I.*//J. Heat Transfer. 1988. V. 110. P. 1154; перевод: *Каттон И.*//Соврем. машиностроение. Сер. А. 1989. № 6. С. 68.  
 168. *Glansdorff P., Prigogine I.*//Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations. — New York: Wiley-Interscience, 1971; перевод: Глендсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М.: Мир, 1973.  
 169. *Busse F.H.*//J. Fluid Mech. 1972. V. 52. P. 97.  
 170. *Clever R.M., Busse F.H.*//Ibidem. 1974. V. 65. P. 625.  
 [171] *Clever R.M., Busse F.H.*//Zs. angew. Math. Phys. 1978. Bd. 29. S. 711.  
 172. *Busse F.H., Clever R.M.*//J. Fluid Mech. 1979. V. 91. P. 319.  
 173. *Bolton E.W., Busse F.H., Clever R.M.*//Ibidem. 1986. V. 164. P. 469.  
 174. *Clever R.M., Busse F.H.*//Ibidem. 1987. V. 176. P. 403.  
 175. *Busse F.H., Bolton E.W.*//Ibidem. 1984. V. 146. P. 115.  
 176. *Bolton E.W., Busse F.H.*//Ibidem. 1985. V. 150. P. 487.  
 177. *Clever R.M., Busse F.H.*//Ibidem. 1989. V. 198. P. 345.  
 178. *Croquette V., Schosseler F.*//J. de Phys. 1982. T. 43. P. 1183.  
 179. *Kolodner P., Walden R.W., Passner A., Surko C.M.*//J. Fluid Mech. 1986. V. 163. P. 195.  
 180. *Heutmaker M.S., Fraenkel P.N., Gollub J.P.*//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1369.  
 [181] *Zaleski S.*//[148]. — P. 84; J. Fluid Mech. 1984. V. 149. P. 101.  
 182. *Cross M.C., Hohenberg P.C., Safran S.A.*//Physica D. 1982. V. 5. P. 75.  
 183. *Bensimon D.*//Phys. Rev. A. 1988. V. 37. P. 200.  
 184. *Гетлинг А.В.*//ДАН СССР. 1981. Т. 257. С. 1081.  
 185. *Croquette V., Pocheau A.*//[148]. — P. 104.  
 186. *Непомнящий А.А.*// Дефекты в конвективных структурах. — Препринт. — Свердловск: УрО АН СССР, 1988.  
 187. *Kramer L., Ben-Jacob E., Brand H., Cross M.C.*//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1891.  
 188. *Hohenberg P.C., Kramer L., Riecke H.*//Physica. D. 1985. V. 15. P. 402.  
 189. *Pomeau Y., Zaleski S.*//J. de Phys. Lett. 1983. T. 44. P. 135.  
 190. *Kramer L., Hohenberg P.C.*//[148]. — P. 63.  
 [191] *Kramer L., Riecke H.*//Zs. Phys. 1985. Bd. B59. S. 245.  
 192. *Buell J.C., Catton I.*//J. Fluid Mech. 1986. V. 171. P. 477.  
 193. *Koschmieder E.L.*//Betir. phys. Atmosph. 1966. Bd. 39. S. 208.  
 194. *Veronis G.*//Astrophys. J. 1963. V. 137. P. 641.  
 195. *Dee G., Langer J.S.*//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 383.  
 196. *Ben-Jacob E., Brand H., Dee G., Kramer L., Langer J.S.*//Physica D. 1985. V. 14. P. 348.  
 197. *Aronson D.G., Weinberger N.F.*//Adv. Math. 1978. V. 30. P. 33.  
 198. *Lücke M., Mihelcic M., Kowolski B.*//Phys. Rev. A. 1987. V. 35. P. 4001.  
 199. *Dee G.*//Physica D. 1985. V. 15. P. 295.  
 200. *Fineberg J., Steinberg V.*//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1332.  
 [201] *Pomeau Y., Manneville P.*//J. de Phys. 1981. T. 42. P. 1067.  
 202. *Buell J.C., Catton I.*//Phys. Fluids. 1986. V. 29. P. 23.  
 203. *Croquette V., Le Gal P., Pocheau A., Guglielmetti R.*//Europhys. Lett. 1986. V. 1. P. 393.  
 204. *Steinberg V., Ahlers G., Cannell D.S.*//Phys. Scr. 1985. V. 32. P. 534.  
 205. *Siggia E.D., Zippelius A.*//Phys. Rev. A. 1981. V. 24. P. 1036.  
 206. *Friedel J.* Dislocations. — Oxford: Pergamon Press, 1964; перевод: *Фридель Ж.* Дислокации. — М.: Мир, 1967.  
 207. *Pomeau Y., Zaleski S., Manneville P.*//Phys. Rev. A. 1983. V. 27. P. 2710.  
 208. *Whitehead J.A.*//Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 2899.  
 209. *Whitehead J.A.*//Ibidem. 1984. V. 27. P. 2389.  
 210. *Newell A.C., Passot T., Souli M.*//J. Fluid Mech. 1990. V. 220. P. 187.  
 211. *Schnaubelt M., Busse F.H.*//J. angew. Math. Phys. 1989. Bd. 40. S. 153.  
 212. *Travis B., Olson P., Schubert G.*//J. Fluid Mech. 1990. V. 216. P. 71.

Статья поступила 17.12.90 г.,  
 после доработки 16.05.91 г.